

Γραφικά & Οπτικοποίηση

Κεφάλαιο 7

Παραμετρικές Καμπύλες και Επιφάνειες

Εισαγωγή

- Έχουμε παρουσιάσει αλγορίθμους σχεδίασης βασικών γεωμετρικών σχημάτων, γραμμών και κύκλων
- Πιο ρεαλιστικές εικόνες στα γραφικά χρειάζονται περισσότερο ευέλικτες καμπύλες και επιφάνειες
- Γεωμετρική Σχεδίαση με Υπολογιστή: περιοχή των γραφικών με υπολογιστή που ασχολείται με σχήματα ελεύθερης μορφής
- 1960:
 - Η ανάγκη μαθηματικών αναπαραστάσεων πολύπλοκων σχημάτων έγινε εμφανής στις βιομηχανίες αυτοκινήτων και αεροναυπηγικής
 - Ο Paul de Casteljau και ο Pierre Bézier ανέπτυξαν ανεξάρτητα τη θεωρία των πολωνυμικών καμπύλων και επιφανειών
 - Αυτή η θεωρία συνιστά το κύριο εργαλείο για την περιγραφή και τη σχεδίαση πολύπλοκων σχημάτων

Εισαγωγή (2)

- Περιγραφές καμπύλων και επιφανειών σε παραμετρική μορφή:
- Καμπύλες σε παραμετρική μορφή:
 - Δίνονται ως 2 (για επίπεδες καμπύλες) ή 3 (για καμπύλες στο χώρο) ανεξάρτητες συνιστώσες συναρτήσεις ως προς παράμετρο t :

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

- Η περιγραφή καμπυλών στο επίπεδο ή στο χώρο είναι τελικά η ίδια, αν σκεφτούμε ότι ισχύει $z(t) = 0$ για επίπεδες καμπύλες
- Επιφάνειες σε παραμετρική μορφή:
 - Δίνονται ως 3 ανεξάρτητες συναρτήσεις συντεταγμένων ως προς παραμέτρους u & v :

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

Εισαγωγή (3)

- Ευθύγραμμο Τμήμα σε παραμετρική μορφή:
 - Μεταξύ 2 σημείων \mathbf{p}_0 και \mathbf{p}_1
 - $\mathbf{P}(t) = (1-t) \mathbf{p}_0 + t \mathbf{p}_1$, $t \in [0,1]$
 - Εκφράζει την γραμμική παρεμβολή ανάμεσα στα σημεία \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1

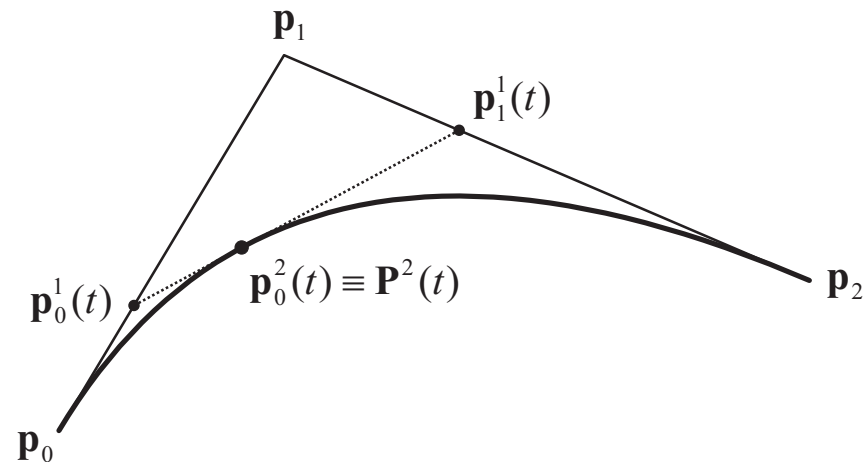
Καμπύλες Bézier

- I. Τετραγωνικές καμπύλες Bézier
- II. Καμπύλες Bézier n -οστού Βαθμού
- III. Αλγόριθμος de Casteljau
- IV. Πολυώνυμα Bernstein
- V. Ιδιότητες καμπυλών Bézier
- VI. Υποδιαίρεση καμπυλών Bézier
- VII. Ομαλή συνένωση καμπυλών Bézier

I. Τετραγωνικές Καμπύλες Bézier

- Έστω 3 σημεία \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 και \mathbf{p}_2
- Πρώτο βήμα: παρεμβολή σημείων σε ζεύγη $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$ και $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$:
$$\mathbf{p}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1, \quad t \in [0,1]$$
$$\mathbf{p}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2,$$
- Για κάθε τιμή $t \in [0,1]$, τα $\mathbf{p}_0^1(t)$ και $\mathbf{p}_1^1(t)$ αναπαριστούν σημεία στα ευθύγραμμα τμήματα $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ αντίστοιχα
- Δεύτερο βήμα: παρεμβολή σημείων $\mathbf{p}_0^1(t)$ και $\mathbf{p}_1^1(t)$ για το ίδιο t :

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0^2(t) &= (1-t)\mathbf{p}_0^1(t) + t\mathbf{p}_1^1(t) \\ &= (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2t(1-t)\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2\end{aligned}$$



I. Τετραγωνικές Καμπύλες Bézier (2)

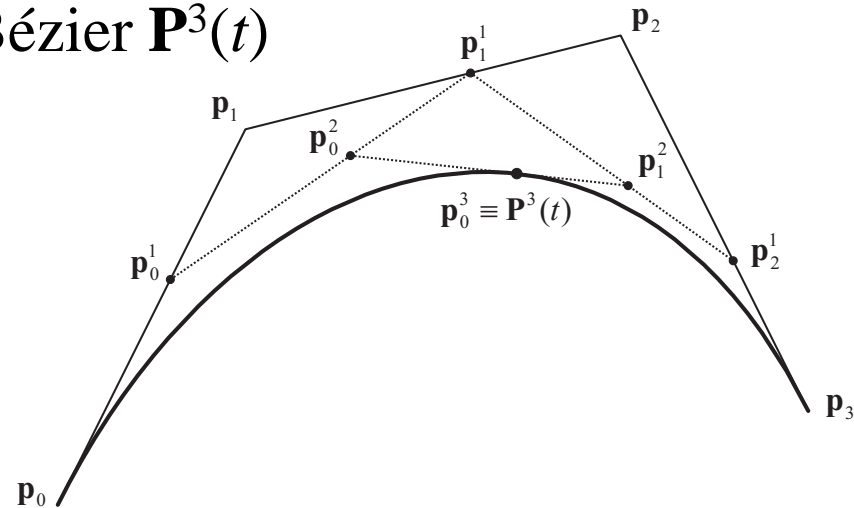
- Όσο το t αυξάνεται από 0 σε 1, τα 3 σημεία $\mathbf{p}_0^1(t)$, $\mathbf{p}_1^1(t)$, $\mathbf{p}_0^2(t)$ μετακινούνται ταυτόχρονα στο αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα
- Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι το σημείο $\mathbf{p}_0^2(t)$ διαγράφει μια τετραγωνική (2^{ου} βαθμού) καμπύλη ως προς την παράμετρο t
- Αυτή η καμπύλη:
 - Είναι μια τετραγωνική καμπύλη Bézier (ή μια 2^{ου} βαθμού καμπύλη Bézier)
 - Θα δηλώνεται σαν $\mathbf{P}^2(t)$
- **Σημεία ελέγχου** καμπύλης Bézier: τα αρχικά σημεία \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2
- $\mathbf{p}_i^r(t)$: r : βήμα παρεμβολής
 i : δείκτης στο πρώτο σημείο που παρεμβάλλεται

II. Καμπύλες Bézier n -οστού Βαθμού

- Η διαδικασία παραγωγής μιας τετραγωνικής καμπύλης Bézier μπορεί να επεκταθεί για περισσότερα σημεία ελέγχου

- Κυβική (ή 3^{ου} βαθμού) καμπύλη Bézier $\mathbf{P}^3(t)$

- Χρειάζεται 4 σημεία ελέγχου
- Εφαρμόζει 3 βήματα γραμμικής παρεμβολής



- Γενική περίπτωση: n -οστού βαθμού καμπύλη Bézier $\mathbf{P}^n(t)$

- Χρειάζεται $(n+1)$ σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$
- Εφαρμόζει n βήματα γραμμικής παρεμβολής
- Πολύγωνο ελέγχου καμπύλης: το πολύγωνο με κορυφές $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$
- Η καμπύλη δίνεται από:
$$\mathbf{P}^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \mathbf{p}_i, \quad t \in [0,1] \quad (1)$$

III. Αλγόριθμος de Casteljau

- Ο τύπος (1) είναι αριθμητικά πολύπλοκος και ασταθής (απαιτεί υπολογισμούς διωνυμικών συντελεστών, δυνάμεων του t και $(1-t)$)
- Τα βήματα παρεμβολής για την παραγωγή καμπυλών Bézier είναι απλές γραμμικές σχέσεις του t
- Αλγόριθμος de Casteljau:
 - Υπολογίζει τα σημεία καμπύλης Bézier
 - Συνοψίζει τα βήματα γραμμικής παρεμβολής σε επαναληπτικό σχήμα
- Βήματα:

1. Για την απαιτούμενη τιμή t , θέσε $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$

2. Εφάρμοσε τα βήματα γραμμικής παρεμβολής:

$$\mathbf{p}_i^r(t) = (1-t) \mathbf{p}_i^{r-1}(t) + t \mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1, 2, \dots, n$$

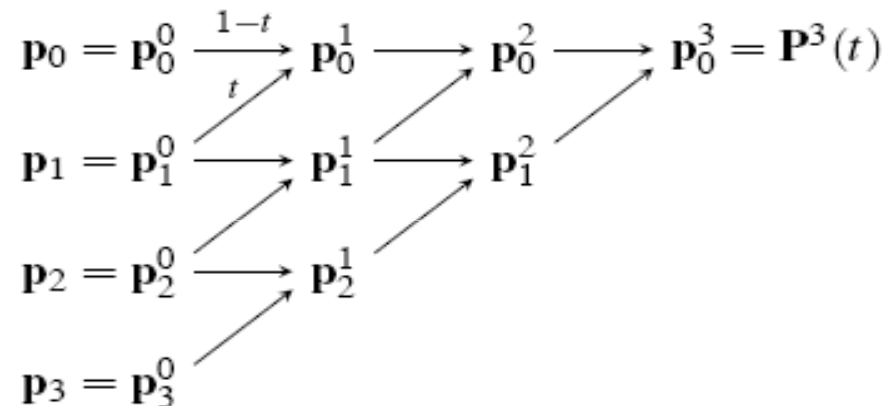
$$i = 0, 1, \dots, n - r$$

3. Σημείο καμπύλης που αντιστοιχεί στην παραμετρική τιμή t :

$$\mathbf{P}^n(t) = \mathbf{p}_0^n(t)$$

III. Αλγόριθμος de Casteljau (2)

- Τρίγωνο de Casteljau: Όλα τα ενδιάμεσα σημεία που περιλαμβάνονται στον αλγόριθμο de Casteljau μπορούν να γραφούν σε μία εύχρηστη τριγωνική διάταξη
 - Για την περίπτωση κυβικής καμπύλης Bézier, το τρίγωνο είναι:



- Εφαρμογή:
 - Δεν χρειάζεται η αποθήκευση όλων των ενδιάμεσων σημείων
 - Χρήση ενός πίνακα 1Δ
 - Αρχικοποίηση του πίνακα με τα σημεία ελέγχου της καμπύλης
 - Αποθήκευση στοιχείων πάνω από τα προηγούμενα από πάνω προς τα κάτω καθώς προχωράει ο αλγόριθμος
 - Στο τέλος, το σημείο της καμπύλης θα είναι το πρώτο στοιχείο του πίνακα

III. Αλγόριθμος de Casteljau (3)

Αλγόριθμος de Casteljau:

```
point bezierPoint ( int n, point[] controlPt, float t )
{
    point deCasPt[n+1];
    for (i=0; i <= n; i++)
        deCasPt[i] = controlPt[i];
    for (r=1; r <= n; r++) {
        for (i=0; i <= n-r; i++) {
            deCasPt[i] = (1-t)*deCasPt[i] + t*deCasPt[i+1];
        }
    }
    return deCasPt[0];
}
```

III. Αλγόριθμος de Casteljau (4)

Παράδειγμα 1: Υπολογισμός σημείου καμπύλης Bézier

Δοθέντων των σημείων ελέγχου μιας καμπύλης Bézier $\mathbf{p}_0=[0 \ 0]^T$, $\mathbf{p}_1=[2 \ 2]^T$, $\mathbf{p}_2=[6 \ 4]^T$ & $\mathbf{p}_3=[8 \ 2]^T$, υπολογίστε το σημείο που αντιστοιχεί στην παραμετρική τιμή $t = 1/4$.

Λύση:

- Το τρίγωνο de Casteljau είναι:
- Κάθε σημείο είναι ένας συσχετισμένος συνδυασμός 2 σημείων της στήλης στα αριστερά:
 - Στην ίδια γραμμή με συντελεστές $3/4$
 - Στην επόμενη γραμμή με συντελεστές $1/4$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{29}{16} \\ \frac{23}{16} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{31}{8} \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Το ζητούμενο σημείο είναι: $\mathbf{P}^3\left(\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} \frac{29}{16} \\ \frac{23}{16} \end{bmatrix}$

IV. Πολυώνυμα Bernstein

- Ορισμός καμπύλης Bézier:
$$\mathbf{P}^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \mathbf{p}_i, \quad t \in [0,1]$$

- Οι συντελεστές του \mathbf{p}_i είναι ειδικά πολυώνυμα που ονομάζονται πολυώνυμα Bernstein βαθμού n :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Η καμπύλη Bézier μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{P}^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{p}_i, \quad t \in [0,1]$$

- Για τις πιο κοινές περιπτώσεις $n=2$ & $n=3$, τα πολυώνυμα Bernstein είναι:

$$B_0^2(t) = (1-t)^2$$

$$B_1^2(t) = 2t(1-t)$$

$$B_2^2(t) = t^2$$

$$B_0^3(t) = (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3^3(t) = t^3$$

IV. Πολυώνυμα Bernstein: Ιδιότητες

- Τα πολυώνυμα Bernstein n -οστού βαθμού αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων n -οστού βαθμού:

- Κάθε πολυώνυμο n -οστού βαθμού $f(t)$ μπορεί να γραφεί σαν:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) c_i$$

όπου c_i , $i=0,1,2,\dots,n$ είναι κατάλληλοι (βαθμωτοί) συντελεστές

- Τα πολυώνυμα Bernstein ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \forall t \quad \text{και}$$

$$0 \leq B_i^n(t) \leq 1, t \in [0,1]$$

- Τα πολυώνυμα Bernstein είναι συμμετρικά ως προς τα t και $1 - t$:

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t)$$

V. Ιδιότητες Καμπυλών Bézier

- Κάθε πολυωνυμική καμπύλη n -οστού βαθμού μπορεί να γραφεί ως καμπύλη Bézier
- Ιδιότητα κυρτού περιβλήματος:
 - Η καμπύλη Bézier πάντα βρίσκεται μέσα στο κυρτό περίβλημα των σημείων ελέγχων της
- Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς:
 - Η καμπύλη Bézier είναι ένας συσχετισμένος συνδυασμός των σημείων ελέγχου
 - Άρα για να εφαρμοστεί ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός στην καμπύλη, αρκεί να μετασχηματιστούν τα σημεία ελέγχου της
- Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς της παραμέτρου:
 - Η καμπύλη παραμένει ανεπηρέαστη αν το $t \in [0, 1]$ αλλάξει σε $u \in [a, b]$ όπου $u = a + (b-a)t$
 - Τα βήματα παρεμβολής γίνονται:

$$\mathbf{p}_i^r(t) = \frac{b-u}{b-a} \mathbf{p}_i^{r-1}(t) + \frac{u-a}{b-a} \mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t)$$

V. Ιδιότητες Καμπυλών Bézier (2)

- Συμμετρία ως προς τα σημεία ελέγχου
 - Αν τα σημεία ελέγχου χρησιμοποιηθούν σε αντίστροφη σειρά $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, p_0$ το σχήμα της καμπύλης δεν αλλάζει
 - Η καμπύλη διασχίζεται με αντίθετη κατεύθυνση
- Γραμμική ακρίβεια
 - Αν όλα τα σημεία ελέγχου βρίσκονται σε ευθεία γραμμή, τότε η καμπύλη έχει το σχήμα ευθείας γραμμής
- Ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης
 - Μια επίπεδη καμπύλη Bézier τέμνεται από τυχαία ευθεία γραμμή σε ΌΧΙ περισσότερες φορές, από αυτές που η ευθεία τέμνει τα πολύγωνο ελέγχου της καμπύλης
 - Μια μη επίπεδη καμπύλη Bézier τέμνεται από τυχαία γραμμή ή επίπεδο ΌΧΙ περισσότερες φορές, από αυτές που η γραμμή ή το επίπεδο τέμνει το πολύγωνο ελέγχου της καμπύλης
 - Καμπύλη με κυρτό πολύγωνο ελέγχου είναι επίσης κυρτή αλλά η αντίστροφη όχι πάντα (μια κυρτή καμπύλη a Bézier μπορεί να έχει μη κυρτό πολύγωνο ελέγχου)

V. Ιδιότητες Καμπυλών Bézier (3)

- Παρεμβολή ακραίων σημείων ελέγχου

- Η καμπύλη ξεκινά στο πρώτο σημείο ελέγχου και τελειώνει στο τελευταίο

$$\mathbf{P}^n(0) = \mathbf{p}_0 \quad \text{and} \quad \mathbf{P}^n(1) = \mathbf{p}_n$$

- Παράγωγοι

- Η εφαπτομένη (1^η παράγωγος) μιας καμπύλης Bézier είναι:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}^n(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$$

- Εφαπτομένη στα άκρα

- Τα εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα της καμπύλης είναι παράλληλα προς την πρώτη και την τελευταία ακμή του πολυγώνου ελέγχου:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}^n(0) = n(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{P}^n(1) = n(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1})$$

- Αν η καμπύλη ορίζεται σε ένα τυχαίο παραμετρικό διάστημα $u \in [a, b]$, τότε:

$$\frac{d}{du} \mathbf{P}^n(a) = \frac{d}{dt} \frac{dt}{du} \mathbf{P}^n(0) = \frac{1}{b-a} n(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

$$\frac{d}{du} \mathbf{P}^n(b) = \frac{d}{dt} \frac{dt}{du} \mathbf{P}^n(1) = \frac{1}{b-a} n(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1})$$

V. Ιδιότητες Καμπυλών Bézier (4)

- Δεύτερες παράγωγοι στα άκρα
 - Δεύτερες παράγωγοι στα άκρα μιας καμπύλης Bézier n -οστού βαθμού:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{P}^n(0) = n(n-1)(\mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{P}^n(1) = n(n-1)(\mathbf{p}_n - 2\mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_{n-2})$$

- Αν η καμπύλη ορίζεται σε ένα τυχαίο παραμετρικό διάστημα $u \in [a, b]$, τότε:

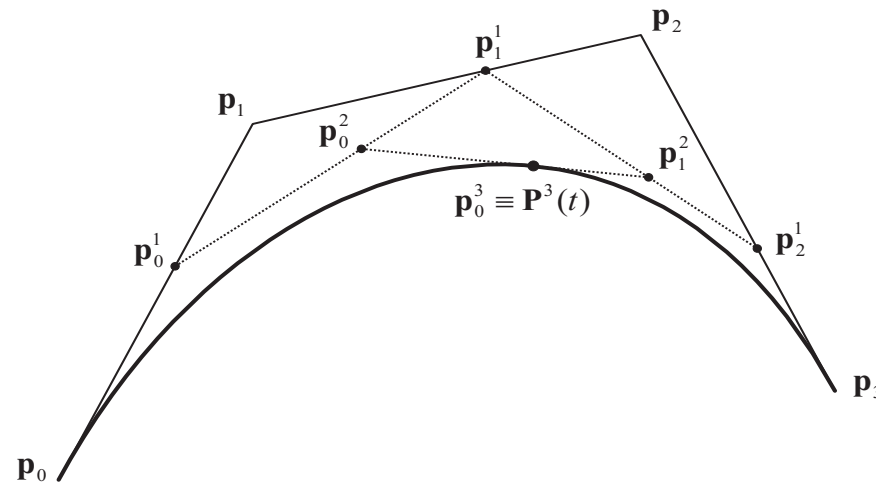
$$\frac{d^2}{du^2} \mathbf{P}^n(a) = \frac{1}{(b-a)^2} n(n-1)(\mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0)$$

$$\frac{d^2}{du^2} \mathbf{P}^n(b) = \frac{1}{(b-a)^2} n(n-1)(\mathbf{p}_n - 2\mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_{n-2})$$

V. Ιδιότητες Καμπυλών Bézier (5)

- Ψευδο-τοπικός έλεγχος
 - *Τοπικός Έλεγχος*: η μετακίνηση ενός σημείο ελέγχου έχει μια τοπική επίδραση στην καμπύλη
 - Οι καμπύλες Bézier δεν έχουν τοπικό έλεγχο αφού τα πολυώνυμα Bernstein είναι μη μηδενικά σε ολόκληρο το παραμετρικό διάστημα $[0,1]$ της καμπύλης
 - Η μετακίνηση κάποιου σημείου ελέγχου τροποποιεί το σχήμα ολόκληρης της καμπύλης
 - Οι καμπύλες Bézier έχουν *ψευδο-τοπικό έλεγχο*: η επίδραση της μετακίνησης του σημείου \mathbf{p}_i είναι πιο ισχυρή γύρω από την παραμετρική τιμή i/n , όπου το $B_i^n(t)$ έχει το μοναδικό μέγιστο σημείο του
 - Ευκολότερη η πρόβλεψη της αλλαγής του σχήματος της καμπύλης Bézier κατά τη μετακίνηση των σημείων ελέγχου

VI. Υποδιαίρεση Καμπυλών Βέζιερ



- Έστω κυβική καμπύλη Βέζιερ $\mathbf{P}^3(t)$
- Οποιαδήποτε παραμετρική τιμή $t_0 \in [0,1]$ διαιρεί την καμπύλη σε δύο τμήματα:
 - Το «αριστερό» με άκρα $\mathbf{P}^3(0) = \mathbf{p}_0$ και $\mathbf{P}^3(t_0)$
 - Το «δεξί» με άκρα σημεία $\mathbf{P}^3(t_0)$ και $\mathbf{P}^3(1) = \mathbf{p}_3$
- Αυτά τα δύο τμήματα είναι κυβικές καμπύλες
- Γράφονται με τη μορφή καμπυλών Βέζιερ
- Σκοπός: προσδιορισμός των σημείων ελέγχου Βέζιερ των 2 τμημάτων

VI. Υποδιαίρεση Καμπυλών Bézier (2)

- Πρώτα εργαζόμαστε για το αριστερό τμήμα, \mathbf{L}
 - Έστω τα σημεία ελέγχου \mathbf{l}_i , $i = 0, 1, 2, 3$ ώστε $\mathbf{L}(t') = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t') \mathbf{l}_i, t' \in [0,1]$
- Χρήση τοπικής παραμέτρου t' για \mathbf{L} , $t \neq t'$, ώστε $\mathbf{L}(t')$ να διατρέχει ολόκληρο το αριστερό τμήμα όταν $t' \in [0,1]$

- Η καμπύλη παρεμβάλλει τα ακραία σημεία ελέγχου, ώστε το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου να προκύπτουν άμεσα:

$$\mathbf{l}_0 = \mathbf{p}_0 = \mathbf{P}^3(0) = \mathbf{p}_0^0(t_0) \quad , \quad \mathbf{l}_3 = \mathbf{P}^3(t_0) = \mathbf{p}_0^3(t_0)$$

- Για το \mathbf{l}_1 : περιλαμβάνεται στην εφαπτόμενη του $\mathbf{L}(t')$ για $t' = 0$, \mathbf{P}^3 & \mathbf{L} έχουν την ίδια εφαπτομένη στο σημείο αυτό, αφού συμπίπτουν όταν $t \in [0, t_0]$, ώστε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{P}^3(0) &= \frac{d}{dt} \mathbf{L}(0) = \frac{d}{dt'} \frac{dt'}{dt} \mathbf{L}(0) \Leftrightarrow 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) = \frac{1}{t_0} 3(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_0) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{l}_1 = (1-t_0)\mathbf{p}_0 + t_0\mathbf{p}_1 \end{aligned}$$

VI. Υποδιαίρεση Καμπυλών Bézier (3)

- Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του αλγορίθμου de Casteljau

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{p}_0^1(t_0)$$

- Όμοια, το \mathbf{l}_2 περιλαμβάνεται στην 2^η παράγωγο του $\mathbf{L}(t')$, για $t = 0$:

$$6(\mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0) = \frac{1}{t_0^2} 6(\mathbf{l}_2 - 2\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_0)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{l}_2 = (1-t_0)^2 \mathbf{p}_0 + 2t_0(1-t_0)\mathbf{p}_1 + t_0^2 \mathbf{p}_2$$

- Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του αλγορίθμου de Casteljau

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{p}_0^2(t_0)$$

- Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως εξής: $\mathbf{l}_i = \mathbf{p}_0^i(t_0)$
- Τα σημεία ελέγχου \mathbf{l}_i του αριστερού τμήματος είναι ακριβώς τα σημεία της 1^{ης} γραμμής του τριγώνου de Casteljau
- Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει για καμπύλες Bézier οποιουδήποτε βαθμού n

VI. Υποδιαίρεση Καμπυλών Bézier (4)

- Δεξί τμήμα:
 - Αντιστοιχεί στο διάστημα $[t_0, 1]$ της καμπύλης
 - Τα σημεία ελέγχου \mathbf{r}_i υπολογίζονται με όμοιο τρόπο, έτσι:
$$\mathbf{r}_i = \mathbf{p}_i^{n-i}(t_0)$$
 - Είναι τα σημεία της “υποτείνουσας” του τριγώνου de Casteljaou
 - Το παραπάνω ισχύει για καμπύλες Bézier οποιουδήποτε βαθμού
- Αλγόριθμος de Casteljaou:
 - Υπολογίζει τα σημεία της καμπύλης που αντιστοιχούν στο t_0
 - Υπολογίζει τα σημεία ελέγχου των 2 τμημάτων στα οποία χωρίζεται η καμπύλη από το t_0
 - Η υλοποίηση δίνει εύκολα τα σημεία \mathbf{r}_i (είναι τα σημεία deCasPt του αλγορίθμου)
 - Για τα σημεία \mathbf{l}_i : μετά την συμπλήρωση κάθε στήλης του τριγώνου, το στοιχείο με δείκτη 0 είναι σημείο ελέγχου του αριστερού τμήματος

VI. Υποδιαίρεση Καμπύλης Bézier- Εφαρμογές

- Η υποδιαίρεση καμπύλης Bézier μπορεί να επαναληφθεί αναδρομικά για καθένα από 2 τμήματα της καμπύλης
- Τα σημεία ελέγχου που παράγονται κατά την αναδρομή συγκλίνουν στην αρχική καμπύλη
- Η σύγκλιση είναι γρήγορη
- Το αποτέλεσμα έχει ενδιαφέρουσες πρακτικές εφαρμογές:
- ❖ Προσφέρει έναν τρόπο σχεδίασης καμπυλών Bézier
 - Αναδρομική υποδιαίρεση της καμπύλης σε 2 τμήματα
 - Μετά από κάποια βήματα, τα σημεία ελέγχου θα είναι σχεδόν συγγραμμικά
 - Τότε η υποδιαίρεση μπορεί να σταματήσει
 - Κάθε τμήμα μπορεί να σχεδιαστεί σαν ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των 2 ακραίων σημείων του

VI. Υποδιαίρεση Καμπύλης Bézier- Εφαρμογές (2)

- Αυτή η μέθοδος είναι *προσαρμοστική*
 - Γρήγορη σχεδίαση των επίπεδων περιοχών
 - Εφαρμογή περισσότερων αναδρομικών βημάτων όταν η καμπύλη έχει υψηλή καμπυλότητα
- Η υποδιαίρεση μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε τιμή t_0
 - Προτιμάμε $t_0=1/2$ επειδή τα βήματα παρεμβολής περιέχουν μόνο διαιρέσεις με το 2
- Έλεγχος συγγραμμικότητας σημείων ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_n$ με:
 - Υπολογισμό της απόστασης κάθε άλλου σημείου ελέγχου $\mathbf{p}_i, i=1,2,\dots,n-1$
 - Εξασφάλιση ότι κάθε τέτοια απόσταση είναι μικρότερη από την απαιτούμενη ανεκτικότητα
- Η απόσταση ενός σημείου ελέγχου \mathbf{p}_i από την ευθεία που ορίζουν τα \mathbf{p}_0 και \mathbf{p}_n :

$$d = \frac{|(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \times (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_i)|}{|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0|}$$

VI. Υποδιαίρεση Καμπύλης Bézier- Εφαρμογές (3)

❖ Εύρεση τομής καμπύλης Bézier με ευθεία

- Αναδρομικός αλγόριθμος:

Κατασκευή περιβάλλοντος κιβωτίου ευθυγραμμισμένου με τους άξονες (AABB) αρχικής καμπύλης

Έλεγχος του (AABB) για τομές με την ευθεία

Αν υπάρχει τομή

υποδιαίρεσε την καμπύλη σε δεξί και αριστερό τμήμα

συνέχισε αναδρομικά με το AABB κάθε τμήματος

- Η υποδιαίρεση σταματά όταν το AABB είναι πολύ μικρό (για δοθείσα ανεκτικότητα)
- Ο αλγόριθμος δουλεύει σωστά:
 - Αν η γραμμή δεν τέμνει το AABB, δεν τέμνει και την καμπύλη

VI. Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Bézier

- Η πολυπλοκότητα του σχήματος μιας καμπύλης Bézier περιορίζεται από το πλήθος των σημείων ελέγχου της
- Για την σχεδίαση πολύπλοκων σχημάτων χρειαζόμαστε καμπύλες Bézier υψηλού βαθμού
- Η χρήση καμπυλών Bézier υψηλού βαθμού δεν είναι ενδεδειγμένος:
 - Όσο πιο υψηλός είναι ο βαθμός, τόσο λιγότερο αποδοτικός είναι ο υπολογισμός (περισσότερα βήματα γραμμικής παρεμβολής, προβλήματα αριθμητικής ακρίβειας)
 - Η έλλειψη τοπικού ελέγχου δυσκολεύει την δημιουργία επιθυμητού σχήματος με μοναδική καμπύλη Bézier
- Καμπύλες Bézier βαθμού > 5 δεν χρησιμοποιούνται στην πράξη
- Λύση: χρήση καμπυλών χαμηλού βαθμού συνενωμένων με τέτοιο τρόπο ώστε το συνολικό σχήμα να είναι ομαλό
- Πιο κοινή μορφή είναι η καμπύλες B-spline (βλ. παρακάτω)
- Εδώ παρουσιάζουμε την ομαλή συνένωση δύο καμπυλών Bézier

VI. Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Bézier (2)

- Δύο πολυωνυμικές καμπύλες $\mathbf{F}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ και $\mathbf{G}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ συνενώνονται με παραμετρική συνέχεια C^r στο t_1 αν οι παράγωγοι r τάξης είναι ίσες στο t_1 :

$$\mathbf{F}^{(r)}(t_1) = \mathbf{G}^{(r)}(t_1)$$

- Συνέχεια C^r σε ένα σημείο \rightarrow συνέχεια C^m για κάθε $0 \leq m < r$
- Πχ. αν $\mathbf{F}(t)$ και $\mathbf{G}(t)$ συνενώνονται στο t_1 με συνέχεια C^2 , τότε:
 - Οι τιμές τους (C^0),
 - Οι εφαπτόμενές τους (C^1) και $\mathbf{F}'(t_1) = \mathbf{G}'(t_1)$ είναι ίσες στο t_1
 - Οι δεύτερες παράγωγοί τους (C^2)
- «Ομαλή» συνένωση: η κλίση της καμπύλης στο σημείο συνένωσης δεν αλλάζει απότομα
- Για πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού k αναζητείται συνέχεια μέχρι C^{k-1} , επειδή οι παράγωγοι k -τάξης τους είναι σταθερές και οι παράγωγοι μεγαλύτερες τάξης είναι 0

VI. Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Bézier (3)

- Έστω δύο καμπύλες Bézier:
 - $\mathbf{P}^n(t)$, $t \in [0,1]$ βαθμού n με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$
 - $\mathbf{Q}^m(t)$, $t \in [1,2]$ βαθμού m με σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$
- Ποιες οι προϋποθέσεις να συνενώνονται στο σημείο $t=1$ με συνέχεια C^2 ?
 1. Συνέχεια C^0 : $\mathbf{p}_n = \mathbf{q}_0$
 2. Συνέχεια C^1 : $n(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}) = m(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \Leftrightarrow \mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_n = \frac{n}{m}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1})$ (1)
το \mathbf{q}_1 πρέπει να τοποθετηθεί στην ευθεία $(\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{p}_n)$ και η απόστασή του από το \mathbf{p}_n να είναι (1)
 3. Συνέχεια C^2 : $n(n-1)(\mathbf{p}_n - 2\mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_{n-2}) = m(m-1)(\mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0)$ (2)
για τον καθορισμό της θέσης του \mathbf{q}_2
- Αν $n = m$ τότε η (1) γίνεται

$$\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1} \quad \text{έτσι} \quad |\mathbf{q}_1\mathbf{p}_n| = |\mathbf{p}_n\mathbf{p}_{n-1}|$$

VI. Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Βézier (4)

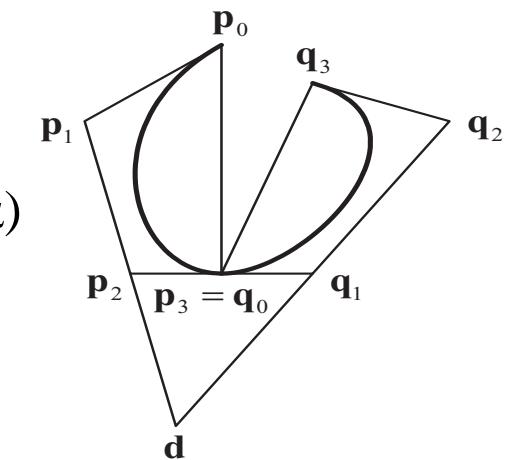
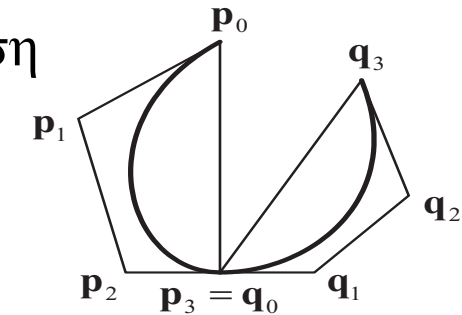
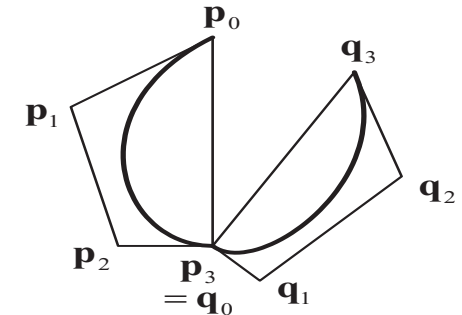
- Αν $n = m = 3$ τότε η (2) γίνεται: $\mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2$

Αν $\mathbf{d} = \mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2$ τότε

\mathbf{d} πρέπει να τοποθετηθεί ώστε $|\mathbf{d}\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1|$

\mathbf{p} πρέπει να τοποθετηθεί ώστε $|\mathbf{d}\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2|$

- Κάθε επιπρόσθετος βαθμός συνέχειας περιορίζει τη θέση ενός ακόμη σημείου ελέγχου
- Για $n=m=3$ με συνέχεια C^2 , μόνο η θέση των \mathbf{p}_0 και \mathbf{q}_3 είναι ελεύθερη
- Για μεγαλύτερη ευελιξία:
 - Χρήση καμπυλών μεγαλύτερου βαθμού (μη αποδοτικό)
 - Απαίτηση χαμηλότερης συνέχειας (μέτρια αποτελέσματα)
 - Τροποποίηση επιθυμητής συνέχειας:
 - αντί της παραμετρικής συνέχειας (C^r) απαίτηση της πιο «αδύναμης» γεωμετρικής συνέχειας (G^r)



Καμπύλες B-Spline

- Καμπύλες Spline: καμπύλες που παράγονται από την συνένωση παραμετρικών καμπυλών με περιορισμούς συνέχειας (βλ. προηγούμενη ενότητα)
- Καμπύλες B-spline:
 - Οι καμπύλες Spline αποτελούνται από πολυωνυμικά τμήματα βαθμού k συνενωμένα με συνέχεια C^{k-1}
 - Ο βαθμός k των τμημάτων είναι επίσης ο βαθμός της καμπύλης B-spline
 - Ορίζονται από τα σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$
 - Το πλήθος $(n+1)$ των σημείων ελέγχου είναι ανεξάρτητο από τον βαθμό της καμπύλης και σχετίζεται με το πλήθος των πολυωνυμικών τμημάτων
 - Τα πολυωνυμικά τμήματα ορίζονται σε διαδοχικά παραμετρικά διαστήματα $[t_i, t_{i+1}]$
 - Πεδίο Ορισμού καμπύλης B-spline: ένωση $[t_{min}, t_{max}]$ των διαστημάτων

Καμπύλες B-Spline (2)

- Κόμβοι της καμπύλης: οι τιμές t_i στα άκρα των διαστημάτων
- Μια καμπύλη B-spline έχει την ακολουθία κόμβων

$$t_{first} \leq \dots \leq t_{min} \leq \dots \leq t_{max} \leq \dots \leq t_{last}$$

γιατί ο ορισμός της απαιτεί κάποιους επιπρόσθετους κόμβους εκτός του πεδίου ορισμού

- Το πλήθος των κόμβων εξαρτάται από:
 - Τον βαθμό της καμπύλης
 - Το πλήθος των σημείων ελέγχων

Καμπύλες B-Spline

- I. Τετραγωνικές καμπύλες B-Spline
- II. Καμπύλες B-Spline βαθμού k
- III. Συναρτήσεις B-Spline
- IV. Αλγόριθμος de Boor
- V. Κόμβοι & Παραμετροποίηση
- VI. Ιδιότητες καμπυλών B-Spline
- VII. Καμπύλες B-Spline σε μορφή Bézier

I. Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline

- Μια τετραγωνική καμπύλη $Q(t)$ αποτελείται από τετραγωνικά τμήματα $Q_i(t)$, που ορίζονται σε παραμετρικά διαστήματα $[t_i, t_{i+1}]$
- Χρήση 3 σημείων ελέγχου για κάθε τμήμα
- Τα 2 βήματα γραμμικής παρεμβολής διαφέρουν από εκείνα των καμπυλών Bézier
- Για τμήματα $Q_i(t)$, χρήση των σημείων ελέγχων \mathbf{p}_{i-2} , \mathbf{p}_{i-1} και \mathbf{p}_i

Βήμα 1:

- Ξεχωριστή παρεμβολή
 - $(\mathbf{p}_{i-2}, \mathbf{p}_{i-1})$ στο διάστημα $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ και
 - $(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i)$ στο διάστημα $[t_i, t_{i+2}]$

για να λάβουμε τα
ενδιάμεσα σημεία:

$$\mathbf{q}_{i-1}^1(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_{i-1}} \mathbf{p}_{i-2} + \frac{t - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \mathbf{p}_{i-1}, \quad t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$$

$$\mathbf{q}_i^1(t) = \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_i} \mathbf{p}_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i} \mathbf{p}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+2}]$$

I. Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline (2)

Βήμα 2:

- Παρεμβολή $\mathbf{q}_{i-1}^1(t)$ και $\mathbf{q}_i^1(t)$ στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\mathbf{Q}_i(t) = \mathbf{q}_i^2(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \mathbf{q}_{i-1}^1(t) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \mathbf{q}_i^1(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (1)$$

- Αντικατάσταση $\mathbf{q}_{i-1}^1(t)$ και $\mathbf{q}_i^1(t)$ για να πάρουμε:

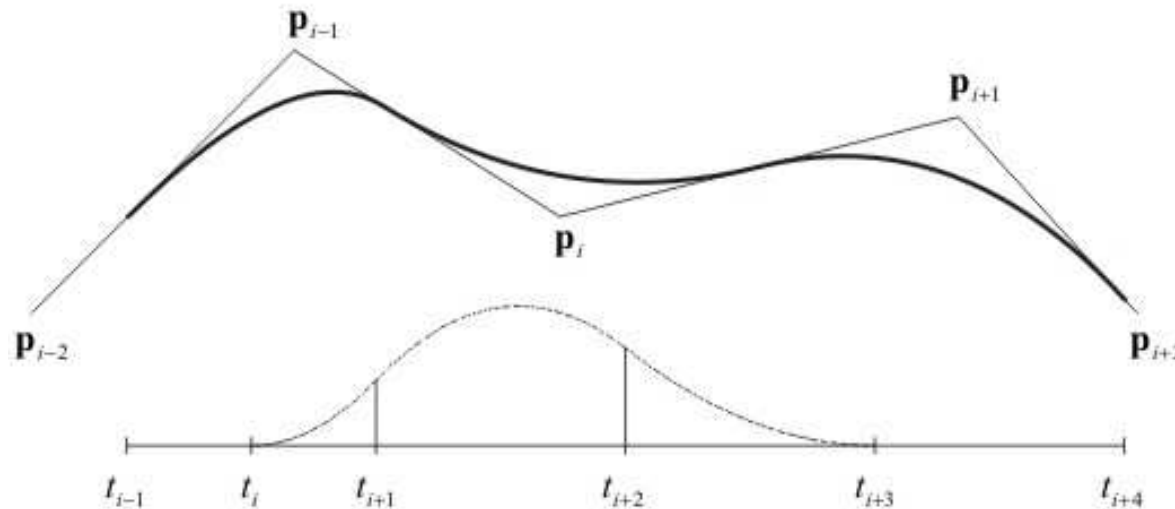
$$\mathbf{Q}_i(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_{i-1}} \mathbf{p}_{i-2} + \left(\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_i} \right) \mathbf{p}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} \mathbf{p}_i$$

- Συνέχεια C^1 :

- Ικανοποιούν $\mathbf{Q}_i(t_{i+1}) = \mathbf{Q}_{i+1}(t_{i+1})$ και $\mathbf{Q}'_i(t_{i+1}) = \mathbf{Q}'_{i+1}(t_{i+1})$
- Συνενώνονται στο t_{i+1} (C^0)
- Οι εφαπτόμενές τους ταυτίζονται (C^1)

I. Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline (3)

- Η (1) δεν είναι χρήσιμη:
 - Παρέχει έκφραση της καμπύλης κατά τμήματα
- Ανάγκη ενιαίας έκφρασης για όλη την καμπύλη ως προς:
 - Τα σημεία ελέγχου της
 - Τους κόμβους της
- Έστω ένα σημείο ελέγχου \mathbf{p}_i
- Το \mathbf{p}_i επηρεάζει 3 διαδοχικά τμήματα της καμπύλης $\mathbf{Q}_i(t)$, $\mathbf{Q}_{i+1}(t)$ και $\mathbf{Q}_{i+2}(t)$



I. Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline (4)

- Ξαναγράφουμε την (1) για τα τμήματα $\mathbf{Q}_i(t)$, $\mathbf{Q}_{i+1}(t)$ και $\mathbf{Q}_{i+2}(t)$

$$\mathbf{Q}_i(t) = a_i \mathbf{p}_{i-2} + b_i \mathbf{p}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} \mathbf{p}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$\mathbf{Q}_{i+1}(t) = a_{i+1} \mathbf{p}_{i-1} + \left(\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} + \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}} \right) \mathbf{p}_i + c_{i+1} \mathbf{p}_{i+1}, \quad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}],$$

$$\mathbf{Q}_{i+2}(t) = \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+2}} \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}} \mathbf{p}_i + b_{i+2} \mathbf{p}_{i+1} + c_{i+2} \mathbf{p}_{i+2}, \quad t \in [t_{i+2}, t_{i+3}]$$

- Αν θέσουμε

$$N_i^2(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}, & t \in [t_i, t_{i+1}), \\ \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} + \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}), \\ \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+2}} \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}, & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}), \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

τότε η επίδραση του \mathbf{p}_i σε όλη την καμπύλη είναι $N_i^2(t)\mathbf{p}_i$

I. Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline (5)

- Μια τετραγωνική καμπύλη B-spline μπορεί να γραφεί αθροίζοντας τις επιδράσεις όλων των σημείων ελέγχου:
$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{i=0}^n N_i^2(t) \mathbf{p}_i \quad (3)$$
- Καθορισμός απαραίτητου πλήθους κόμβων για την τετραγωνική καμπύλη B-spline:
 - Με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$
 - Πρώτο τμήμα $\mathbf{Q}_2(t)$ χρησιμοποιεί $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ & απαιτεί κόμβους t_1, t_2, t_3, t_4
 - Τελευταίο τμήμα $\mathbf{Q}_n(t)$ χρησιμοποιεί $\mathbf{p}_{n-2}, \mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_n$ & απαιτεί κόμβους $t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}$
- Μια τετραγωνική καμπύλη B-spline με $(n+1)$ σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ απαιτεί $(n+2)$ κόμβους t_1, t_2, \dots, t_{n+2}
- Το πεδίο ορισμού της καμπύλης είναι $[t_2, t_{n+1}]$
- 2 επιπλέον κόμβοι απαιτούνται (t_0, t_{n+3}) για να οριστούν τα $N_0^2(t)$ και $N_n^2(t)$
 - Αυτοί οι κόμβοι δεν συνεισφέρουν στο σχήμα της καμπύλης

II. Καμπύλες B-Spline Βαθμού k

- Γενίκευση της μεθόδου παραγωγής τετραγωνικής καμπύλης B-spline για καμπύλες υψηλότερο βαθμού
- Ένα τμήμα $\mathbf{Q}_i(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ μιας καμπύλης B-spline βαθμού k απαιτεί k βήματα γραμμικής παρεμβολής
- Βήμα 1:
 - Παρεμβολή $(k+1)$ σημείων ελέγχου $\mathbf{p}_{i-k}, \mathbf{p}_{i-k+1}, \mathbf{p}_i$ ανά ζεύγη
 - Αποτέλεσμα: σημεία $\mathbf{q}_j^1(t)$, $j=i-k+1, i-k+2, \dots, i$, $t \in [t_j, t_{j+k}]$ πάνω στα γραμμικά τμήματα
- Βήματα $r = 2, 3, \dots, k$:
 - Παρεμβολή σημείων προηγούμενου βήματος
 - Αποτέλεσμα: σημεία $\mathbf{q}_j^r(t)$, $j=i-k+r, \dots, i$, $t \in [t_j, t_{j+k}]$ πάνω στα τμήματα βαθμού r
- Μετά από k βήματα: προκύπτει ένα τμήμα βαθμού k
 - Συνένωση με συνέχεια C^{k-1} διαδοχικών τμημάτων $\mathbf{Q}_i(t) \rightarrow$ σχηματισμός καμπύλης B-spline βαθμού k

II. Καμπύλες B-Spline Βαθμού k (2)

- Έκφραση της καμπύλης ως προς σημεία ελέγχου και κόμβους:
 - Κάθε σημείο \mathbf{p}_i επηρεάζει $(k+1)$ τμήματα $\mathbf{Q}_j(t)$, $j=i, i+1, \dots, i+k$
 - Κατασκευή συνάρτησης $N_i^k(t)$ που εκφράζει τη συνεισφορά στην καμπύλη
- Οι $N_i^k(t)$ καλούνται συναρτήσεις B-spline βαθμού k
- Η καμπύλη B-spline γράφεται:
$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) \mathbf{p}_i$$
- Αποτελείται από $(n-k+1)$ τμήματα βαθμού k
- Κάθε τμήμα ορίζεται στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$, $i=k, k+1, \dots, n$
- Το πεδίο ορισμού της καμπύλης είναι το $[t_k, t_{n+1}]$
- Υπάρχουν $(n + k)$ κόμβοι t_1, t_2, \dots, t_{n+k}
 - Οι κόμβοι t_0 και t_{n+k} χρειάζονται για τον ορισμό των $N_i^k(t)$ αλλά δεν επηρεάζουν το σχήμα
 - Οι κόμβοι μπορεί να επαναλαμβάνονται
 - Το πολύ k διαδοχικοί κόμβοι μπορεί να είναι ίσοι, $t_i < t_{i+k}$

III. Συναρτήσεις B-Spline

- $N_i^k(t)$: Συναρτήσεις B-spline βαθμού k :

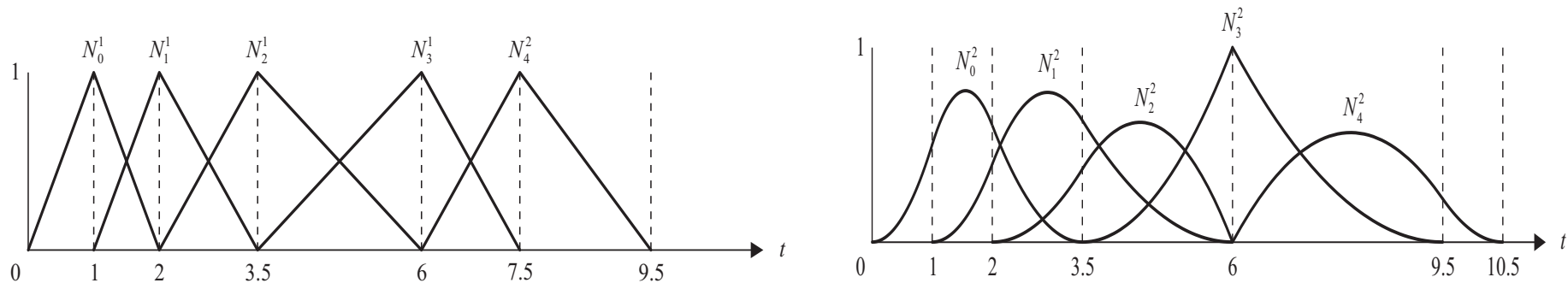
$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Για $r = 1, 2, \dots, k$ και $i = 0, 1, \dots, n+k-r$:

$$N_i^r(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(t) + \frac{t_{i+r+1} - t}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(t)$$

- $N_i^k(t)$: Είναι
 - Πολυώνυμα βαθμού r ως προς t με τοπική στήριξη (μη μηδενική τιμή) στο $[t_i, t_{i+r+1})$
 - Συναρτήσεις Spline καθώς αποτελούνται από $(r+1)$ πολυωνυμικά τμήματα βαθμού r συνενωμένα στους κόμβους με συνέχεια C^{r-1}

III. Συναρτήσεις B-Spline



- Κάθε συνάρτηση 1^{ου} βαθμού $N_i^1(t)$ αποτελείται από 2 γραμμικά τμήματα συνενωμένα στο t_{i+1} (C^0)
- Κάθε συνάρτηση 2^{ου} βαθμού $N_i^2(t)$ αποτελείται από 3 τετραγωνικά τμήματα συνενωμένα στα t_{i+1} & t_{i+2} με συνέχεια C^1
- Δοθέντος ενός βαθμού k και των κόμβων $t_0, t_1, \dots, t_{n+k}, t_{n+k+1}$, όλες οι συναρτήσεις spline που ορίζονται για αυτή την ακολουθία κόμβων αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο
- Οι $(n+1)$ συναρτήσεις B-spline βαθμού k που ορίζονται για την ακολουθία κόμβων αποτελούν μια βάση αυτού του διαν. χώρου
- B-splines \rightarrow Basis splines

IV. Αλγόριθμος de Boor

- Ο αλγόριθμος de Casteljau υπολογίζει σημεία σε καμπύλη Bézier
- Ο αλγόριθμος de Boor:
 - Υπολογίζει σημεία σε καμπύλη B-spline
 - Συνοψίζει τα βήματα γραμμικής παρεμβολής
- Λόγω της τοπικής στήριξης, πρέπει να ξέρουμε το διάστημα στο οποίο ανήκει το επιθυμητό t ώστε να υπολογίσουμε το $\mathbf{Q}(t)$

Βήματα :

1. Εύρεση παραμετρικών διαστημάτων $[t_i, t_{i+1})$, για την τιμή t . Το πεδίο ορισμού είναι $[t_k, t_{n+1}]$ έτσι το i πρέπει να ικανοποιεί $k \leq i \leq n$
2. Θέσε $\mathbf{q}_j^0(t) = \mathbf{p}_j$, $j = i - k, i - k + 1, \dots, i$
3. Εφάρμοσε τα βήματα γραμμικής παρεμβολής:

$$\mathbf{q}_j^r(t) = \frac{t_{k-r+1+j} - t}{t_{k-r+1+j} - t_j} \mathbf{q}_{j-1}^{r-1}(t) + \frac{t - t_j}{t_{k-r+1+j} - t_j} \mathbf{q}_j^{r-1}(t), \quad r = 1, 2, \dots, k$$
$$j = i - k + r, i - k + r + 1, \dots, i$$

4. Το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στο t είναι: $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}_i^k(t)$

IV. Αλγόριθμος de Boor (2)

- Όλα τα ενδιάμεσα σημεία γράφονται σε τριγωνική διάταξη
- Για μια κυβική καμπύλη B-spline:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{p}_{i-3} & = & \mathbf{q}_{i-3}^0 & & & & \\ \mathbf{p}_{i-2} & = & \mathbf{q}_{i-2}^0 & & \mathbf{q}_{i-2}^1 & & \\ \mathbf{p}_{i-1} & = & \mathbf{q}_{i-1}^0 & & \mathbf{q}_{i-1}^1 & & \mathbf{q}_{i-1}^2 \\ \mathbf{p}_i & = & \mathbf{q}_i^0 & & \mathbf{q}_i^1 & & \mathbf{q}_i^2 & & \mathbf{q}_i^3 = \mathbf{Q}(t) \end{array}$$

- Διαφορές από το τρίγωνο de Casteljau:
 - Οι συντελεστές που περιλαμβάνονται στα βήματα γραμμικής παρεμβολής **δεν είναι σταθεροί** ($1-t$ και t) – εξαρτώνται από την γραμμή και την στήλη στην οποία βρίσκονται
 - Όταν γίνεται εφαρμογή με ένα 1Δ πίνακα:
 - ◆ Τα ενδιάμεσα σημεία πρέπει να υπολογίζονται από κάτω προς τα πάνω ώστε να μην διαγράφονται απαραίτητα σημεία

IV. Αλγόριθμος de Boor (3)

Αλγόριθμος de Boor:

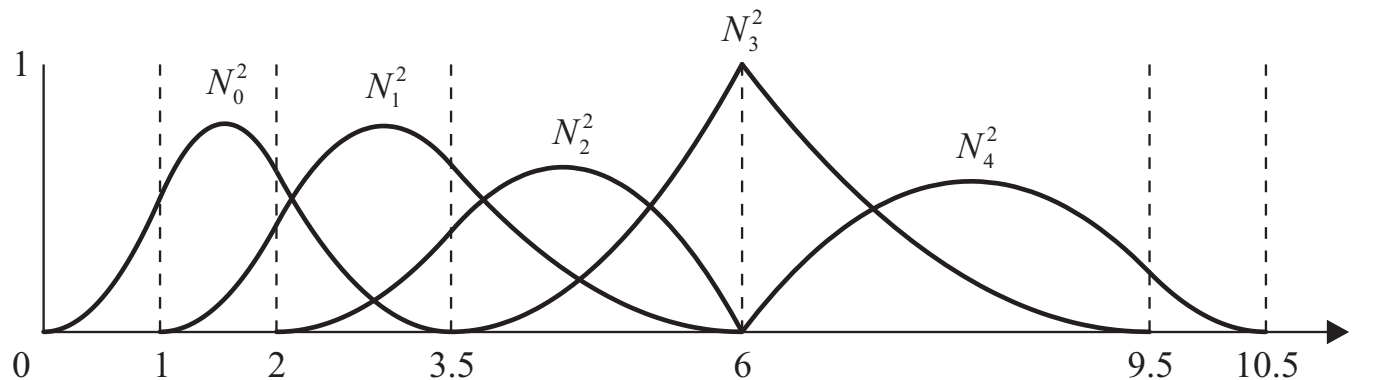
```
for (j = i-k; j <= i; j++) {
    m = j-i+k; // έτσι ώστε m = 0, 1, ..., k-r
    deBoorPt[m] = controlPt[j];
}
for (r = 1; r <= k; r++) {
    for (j = i; j >= i-k+r; j--) {
        m = j-i+k;
        coeff = (t-knots[j]) / (knots[k-r+1+j] - knots[j]);
        deBoorPt[m] = (1-coeff)*deBoorPt[m-1]
                    + coeff*deBoorPt[m];
    }
}
```

V. Ιδιότητες Κόμβων

- Η ακολουθία κόμβων μιας καμπύλης B-spline επηρεάζει άμεσα το σχήμα της
 - Ίδια σημεία ελέγχου, αλλά διαφορετικοί κόμβοι \rightarrow το σχήμα διαφέρει
- Ένας κόμβος έχει πολλαπλότητα k : αν επαναλαμβάνεται k φορές
- Αν για μια καμπύλη B-spline βαθμού k ο 1^{ος} κόμβος έχει πολλαπλότητα k ($t_1=t_2=\dots=t_{k-1}=t_k$) τότε
 - $\mathbf{Q}(t_1) = \mathbf{Q}(t_k) = \mathbf{q}_0$
 - Η καμπύλη παρεμβάλλει το πρώτο σημείο ελέγχου
- Αν ο τελευταίος κόμβος έχει πολλαπλότητα k , η καμπύλη παρεμβάλλει το τελευταίο σημείο ελέγχου \mathbf{p}_n
- Ανοικτή ακολουθία κόμβων: αν οι πρώτοι και οι τελευταίοι k κόμβοι της ακολουθίας είναι ίσοι
- Οι καμπύλες B-splines παρεμβάλλουν τα ακραία σημεία ελέγχου τους μόνο όταν χρησιμοποιείται μια ανοικτή ακολουθία κόμβων

V. Ιδιότητες Κόμβων (2)

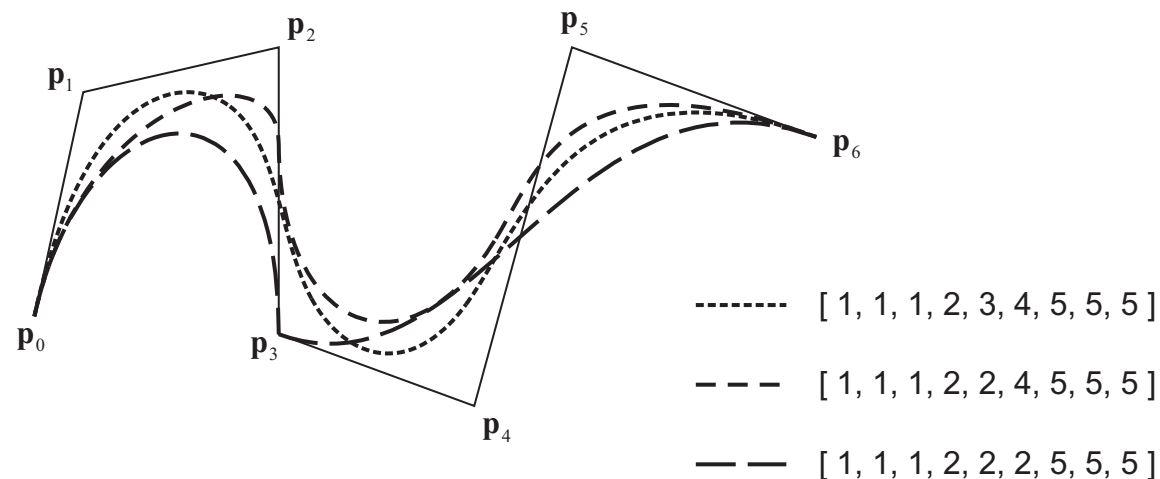
- Αν ένας κόμβος επαναλαμβάνεται, $t_i = t_{i+1}$, η καμπύλη χάνει μια τάξη συνέχειας στο $Q(t_i)$
- Αν ένας κόμβος έχει πολλαπλότητα r , η καμπύλη είναι C^{k-r} στο συγκεκριμένο σημείο



- Οι παραπάνω συναρτήσεις B-spline δεν είναι C^1 συνεχείς παντού αλλά μόνο C^0 συνεχείς στον διπλό κόμβο

V. Ιδιότητες Κόμβων (3)

- Καθώς αυξάνει η πολλαπλότητα ενός κόμβου, η καμπύλη προσεγγίζει το πολύγωνο ελέγχου της στην περιοχή των κόμβου
- Όταν η πολλαπλότητα ενός κόμβου == βαθμό της καμπύλης:
 - Σχηματίζεται μια γωνία στο συγκεκριμένο σημείο ελέγχου αφού η καμπύλη είναι μόνο C^0 συνεχής
- Η παραπάνω ιδιότητα είναι χρήσιμη στην πράξη διότι μπορούμε να ελέγξουμε καλύτερα το σχήμα της καμπύλης
- Ένας κόμβος δεν επαναλαμβάνεται πάνω από k φορές
 - Μικρότερη συνέχεια από $C^0 \rightarrow$ ασυνέχεια στην καμπύλη



V. Παραμετροποιήσεις

- Η ακολουθία κόμβων μπορεί:
 - Να δοθεί από τον χρήστη
 - Να παραχθεί αυτόματα
- Παραμετροποιήσεις:
 - Συγκεκριμένοι αλγόριθμοι που παράγουν ακολουθίες κόμβων
- Προσπαθούν να παράξουν μια καμπύλη «καλού» σχήματος

V. Παραμετροποιήσεις (2)

❖ Ομοιόμορφη Παραμετροποίηση

- Οι κόμβοι ισαπέχουν
- Έστω: $t_i = i-1, \quad i = 1, 2, \dots, n+k$

❖ Ανοικτή Ομοιόμορφη Παραμετροποίηση

- Χρησιμοποιείται ώστε η καμπύλη να παρεμβάλλει το πρώτο και το τελευταίο σημείο της

$$t_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, k \\ i - k, & i = k + 1, \dots, n \\ n - k + 1, & i = n + 1, \dots, n + k \end{cases}$$

- Ομοιόμορφες ακολουθίες κόμβων:
 - Δημιουργούν οπτικά αποδεκτές καμπύλες τις περισσότερες φορές
 - Δεν λαμβάνουν υπόψη τους το σχήμα της καμπύλης
 - Μπορεί να μην παράγουν πάντα καλοσχηματισμένες, ομαλές καμπύλες
 - ◆ Π.χ. Αν τα σημεία ελέγχου είναι κοντά το ένα στο άλλο σε περιοχές όπου η καμπυλότητα αλλάζει απότομα

V. Παραμετροποιήσεις (3)

❖ Παραμετροποίηση μήκους χορδής

- Συχνά χρησιμοποιείται στην πράξη
- Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι ανάλογες με τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων ελέγχου

$$t_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, k \\ t_{i-1} + |\mathbf{p}_{i-k} - \mathbf{p}_{i-k-1}|, & i = k + 1, \dots, n \\ \sum_{j=0}^{n-k} |\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j|, & i = n + 1, \dots, n + k \end{cases}$$

- Διαφορετικές παραμετροποιήσεις μήκους χορδής παράγονται με:
 - Αλλαγή των ακραίων κόμβων
και / ή
 - Με την μη απαίτηση η καμπύλη να παρεμβάλλει το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου

V. Παραμετροποιήσεις (4)

❖ Κεντρομόλος παραμετροποίηση

- Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι ανάλογες με την τετραγωνική ρίζα των αποστάσεων μεταξύ των αντίστοιχων σημείων ελέγχου

$$t_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, k \\ t_{i-1} + \sqrt{|\mathbf{p}_{i-k} - \mathbf{p}_{i-k-1}|}, & i = k + 1, \dots, n \\ \sum_{j=0}^{n-k} \sqrt{|\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j|}, & i = n + 1, \dots, n + k \end{cases}$$

- Διαφορετικές κεντρομόλοι παραμετροποιήσεις παράγονται με:
 - Διαφορετικές συνθήκες για τα άκρα

V. Εισαγωγή Κόμβου

- Προσθήκη ακολουθίας κόμβων χωρίς να επηρεαστεί το σχήμα
- Όταν εισάγεται ένας κόμβος, κάποιο από τα παρακάτω πρέπει να αυξηθεί κατά 1:
 - Ο βαθμός της καμπύλης H
 - Το πλήθος των σημείων ελέγχουώστε η συσχέτιση μεταξύ του βαθμού, του πλήθους των σημείων ελέγχου και τον κόμβων να διατηρηθεί
- Καμπύλες υψηλού βαθμού είναι δύσκολες στον υπολογισμό και τη διαχείριση, για αυτό προτιμούμε:
 - Να προσθέσουμε ένα καινούριο σημείο ελέγχου, και
 - Να μετακινήσουμε τα άλλα ώστε να διατηρηθεί το σχήμα της καμπύλης
- Ο νέος κόμβος και το νέο σημείο ελέγχου δίνουν μεγαλύτερη ευελιξία στο σχήμα
- Καθώς εισάγονται κόμβοι, το πολύγωνο ελέγχου προσεγγίζει την καμπύλη

V. Εισαγωγή Κόμβου (2)

- Εισαγωγή κόμβου s μεταξύ των κόμβων t_i και t_{i+1} :
 - Η νέα ακολουθία κόμβων θα είναι $t_1, \dots, t_i, s, t_{i+1}, \dots, t_{n+k}$
- Έστω $\mathbf{r}_j, j=0, 1, \dots, n+1$ τα νέα σημεία ελέγχου
- Μόνο k από τα νέα σημεία ελέγχου θα διαφέρουν επειδή ένα σημείο ελέγχου \mathbf{p}_i επηρεάζει την καμπύλη στο $[t_i, t_{i+k+1}]$ όπου $N_i^k(t) \neq 0$

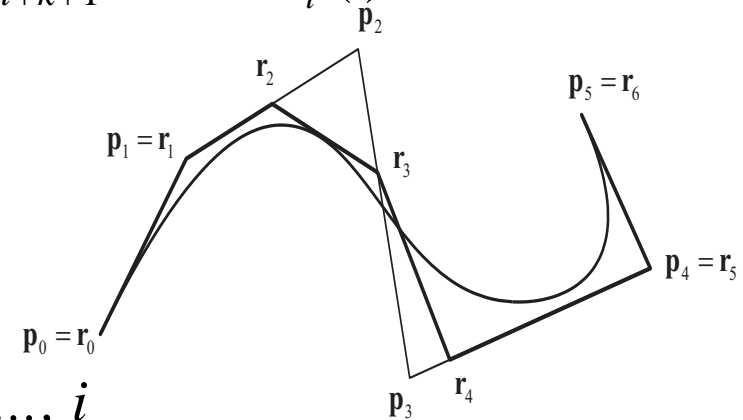
- Τα σημεία ελέγχου που δεν επηρεάζονται είναι:

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{p}_j, \quad j = 0, \dots, i - k$$

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{p}_{j-1}, \quad j = i + 1, \dots, n + 1$$

- Τα νέα σημεία ελέγχου είναι $\mathbf{r}_j, j = i - k + 1, \dots, i$

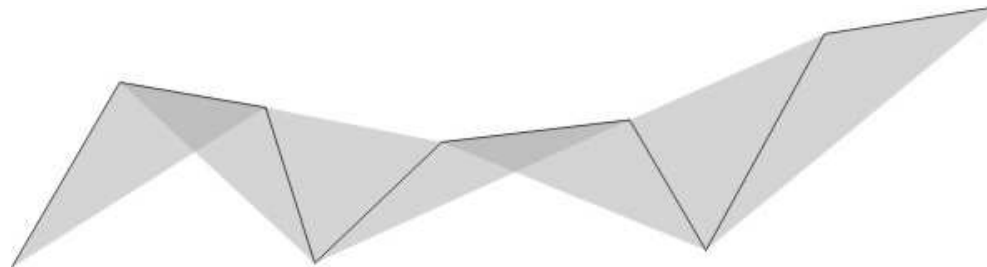
$$\mathbf{r}_j = \frac{t_{j+k} - s}{t_{j+k} - t_j} \mathbf{p}_{j-1} + \frac{s - t_j}{t_{j+k} - t_j} \mathbf{p}_j, \quad j = i - k + 1, \dots, i$$



- Ο τύπος ονομάζεται τύπος εισαγωγής κόμβων του Boehm

VI. Ιδιότητες Καμπυλών B-Spline

- Τοπικός έλεγχος
 - Οι καμπύλες B-splines έχουν πλήρη τοπικό έλεγχο
 - Η αλλαγή ενός σημείου ελέγχου επηρεάζει το σχήμα της καμπύλης σε ένα περιορισμένο τμήμα της
 - Το \mathbf{p}_i επηρεάζει μόνο το τμήμα της καμπύλης που αντιστοιχεί στο $[t_i, t_{i+k+1}]$ όπου $N_i^k(t) \neq 0$
- Ισχυρή ιδιότητα κυρτού περιβλήματος
 - Όλα τα βήματα παρεμβολής που γίνονται, είναι κυρτοί συνδυασμοί των σημείων ελέγχου
 - Κάθε σημείο της καμπύλης βρίσκεται εντός του κυρτού περιβλήματος των $(k+1)$ σημείων ελέγχου που συνεισφέρουν στον υπολογισμό του
 - Όλη η καμπύλη βρίσκεται μέσα στην ένωση αυτών των κυρτών περιβλημάτων



VI. Ιδιότητες Καμπυλών B-Spline (2)

- Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς:
 - Η καμπύλη B-spline είναι ένας συσχετισμένος συνδυασμός των σημείων ελέγχου της
 - Για την εφαρμογή ενός συσχετισμένου μετασχηματισμού σε μια καμπύλη B-spline αρκεί να μετασχηματιστούν μόνο τα σημεία ελέγχου της καμπύλης
 - Οι παραμετροποιήσεις **δεν** διατηρούνται
 - Μόνο η ομοιόμορφη παραμετροποίηση διατηρείται
- Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς της παραμέτρου:
 - Η καμπύλη παραμένει αμετάβλητη αν $u = a + (b-a)t$
 - Οι παραμετροποιήσεις δεν διατηρούνται (εκτός της ομοιόμορφης)
- Ισχυρή γραμμική ακρίβεια
 - Αν τα σημεία ελέγχου βρίσκονται σε ευθεία γραμμή, τότε η καμπύλη εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα
 - Αν $(k+1)$ σημεία ελέγχου είναι συγγραμικά, το αντίστοιχο τμήμα είναι ευθύγραμμο τμήμα

VI. Ιδιότητες καμπυλών B-Spline (3)

- Ισχυρή ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης
 - Γενική Μορφή:
 - ◆ Μια επίπεδη καμπύλη B-spline δεν τέμνεται από ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα περισσότερες φορές από όσες το πολύγωνο ελέγχου της
 - ◆ Μια μη-επίπεδη καμπύλη B-spline δεν τέμνεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα ή ένα επίπεδο περισσότερες φορές από όσες το πολύγωνο ελέγχου της
 - Ισχυρή μορφή
 - ◆ Τα παραπάνω ισχύουν και για το πολύγωνο που σχηματίζεται από τα $(k+1)$ σημεία ελέγχου που συνεισφέρουν σε κάθε σημείο της καμπύλης
- Παρεμβολή ακραίων σημείων ελέγχου
 - Μια καμπύλη B-spline παρεμβάλει τα ακραία σημεία ελέγχου μόνο αν χρησιμοποιείται μία ανοικτή ακολουθία κόμβων

VI. Ιδιότητες καμπυλών B-Spline (4)

- Παράγωγος

- Η εφαπτομένη (πρώτη παράγωγος) μιας καμπύλης B-spline k -βαθμού είναι:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}(t) = k \sum_{i=0}^{n-1} N_i^{k-1}(t) \frac{1}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$$

- Γενίκευση των καμπυλών Bézier

- Μια καμπύλη B-spline βαθμού k με $(k+1)$ σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ και ακολουθία κόμβων $(0^{<k>, 1^{<k>})$ είναι μια καμπύλη Bézier βαθμού k με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$
- $x^{<k>}$: κόμβος με πολυπλοκότητα k

VII. Καμπύλες B-Spline σε μορφή Bézier

- Μια καμπύλη B-spline k -βαθμού αποτελείται από πολυωνυμικά τμήματα k -βαθμού ορισμένα στο $[t_i, t_{i+1}]$
- Καθένα από τα τμήματα γράφεται σαν καμπύλη Bézier βαθμού k
- Είναι χρήσιμο να έχουμε μια έκφραση της καμπύλης B-spline ως κατά τμήματα καμπύλη Bézier :
 - Οι καμπύλες Bézier είναι απλές και καλά μελετημένες
 - Σχεδίαση μιας καμπύλης B-spline σχεδιάζοντας τις καμπύλες Bézier

VII. Bézier Μορφή των Τετραγωνικών B-splines

- Έστω:
 - Μια τετραγωνική ($k=2$) καμπύλη B-spline $\mathbf{Q}(t)$
 - Ένα τμήμα $\mathbf{Q}_i(t)$ που ορίζεται από (B-spline) σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{i-2}, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i$
- Σε μορφή Bézier το $\mathbf{Q}_i(t)$ ορίζεται στο $[t_i, t_{i+1}]$ με 3 (Bézier) σημεία ελέγχου $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$
- \mathbf{r}_0 και \mathbf{r}_2 είναι τα άκρα του τμήματος $\mathbf{Q}_i(t_i)$ και $\mathbf{Q}_i(t_{i+1})$
- \mathbf{r}_1 συμπίπτει με το B-spline σημείο ελέγχου \mathbf{p}_{i-1}
- Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του αλγορίθμου de Boor :

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{Q}_i(t_i) = \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+1} - t_{i-1}} \mathbf{p}_{i-2} + \frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{q}_{i-1}^1(t_i)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{p}_{i-1}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{Q}_i(t_{i+1}) = \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+2} - t_i} \mathbf{p}_{i-1} + \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+2} - t_i} \mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i^1(t_{i+1})$$

VII. Bézier Μορφή των Κυβικών B-splines

- Έστω:
 - Μια κυβική ($k=3$) καμπύλη B-spline $\mathbf{Q}(t)$
 - Ένα τμήμα $\mathbf{Q}_i(t)$ που ορίζεται από (B-spline) σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{i-3}, \mathbf{p}_{i-2}, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i$ στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$
- Η μορφή Bézier $\mathbf{Q}_i(t)$ ορίζεται με 4 (Bézier) σημεία ελέγχου $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$
- \mathbf{r}_0 και \mathbf{r}_3 είναι τα άκρα του τμήματος, $\mathbf{Q}_i(t_i)$ και $\mathbf{Q}_i(t_{i+1})$
- Τα εσωτερικά σημεία ελέγχου είναι μερικά από τα ενδιάμεσα σημεία που δημιουργήθηκαν στη διάρκεια της παρεμβολής.

- Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του αλγορίθμου de Boor:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+1} - t_{i-1}} \left(\frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+1} - t_{i-2}} \mathbf{p}_{i-3} + \frac{t_i - t_{i-2}}{t_{i+1} - t_{i-2}} \mathbf{p}_{i-2} \right) + \frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{q}_{i-1}^1(t_i) = \frac{t_{i+2} - t_i}{t_{i+2} - t_{i-1}} \mathbf{p}_{i-2} + \frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+2} - t_{i-1}} \mathbf{p}_{i-1}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{q}_{i-1}^1(t_{i+1}) = \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+2} - t_{i-1}} \mathbf{p}_{i-2} + \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{t_{i+2} - t_{i-1}} \mathbf{p}_{i-1}$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+2} - t_i} \mathbf{r}_2 + \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+2} - t_i} \left(\frac{t_{i+3} - t_{i+1}}{t_{i+3} - t_i} \mathbf{p}_{i-1} + \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+3} - t_i} \mathbf{p}_i \right)$$

Ρητές Καμπύλες Bézier & B-Spline

- Οι καμπύλες Bézier και B-Spline είναι οι βασικές παραμετρικές καμπύλες που χρησιμοποιούνται
- Υπάρχουν 2 μειονεκτήματα:
 - Όχι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς προβολής \rightarrow δύσκολο σε 3Δ σκηνές
 - Δεν μπορούν να αναπαραστήσουν κωνικές τομές (κύκλους, ελλείψεις, παραβολές, υπερβολές) εκτός από παραβολές
- Τα προβλήματα αντιμετωπίζονται με τις ρητές καμπύλες *Bézier & B-Spline*
- Οι ρητές καμπύλες είναι πολυωνυμικές παραμετρικές καμπύλες που χρησιμοποιούν ομογενείς συντεταγμένες
- Αν δίνεται μία πολυωνυμική καμπύλη $\mathbf{X}(t)=[x(t), y(t), z(t)]^T$ ($z(t)=0$ για επίπεδες), κατασκευάζουμε: $\mathbf{X}^h(t)=[w(t)x(t), w(t)y(t), w(t)z(t), w(t)]^T$
- Αν $w(t)$ σταθερό για κάθε t , παίρνουμε την αρχική $\mathbf{X}(t)$
- Ο ορισμός των ρητών καμπυλών Bézier & B-spline είναι άμεσος αφού οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες

Ρητές Καμπύλες Bézier

- Έστω μια ακολουθία από ομογενή σημεία ελέγχου:

$$\mathbf{p}_i^h = [w_i \mathbf{p}_i, w_i]^T = [w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i]^T$$

$i=0, \dots, n$. Μια ομογενής καμπύλη Bézier ορίζεται ως:

$$\mathbf{P}^h(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{p}_i^h = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i \mathbf{p}_i \\ \sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i \end{bmatrix}$$

- Διαιρώντας όλες τις συντεταγμένες με την ομογενή, παίρνουμε τη συνήθη καρτεσιανή μορφή της καμπύλης:

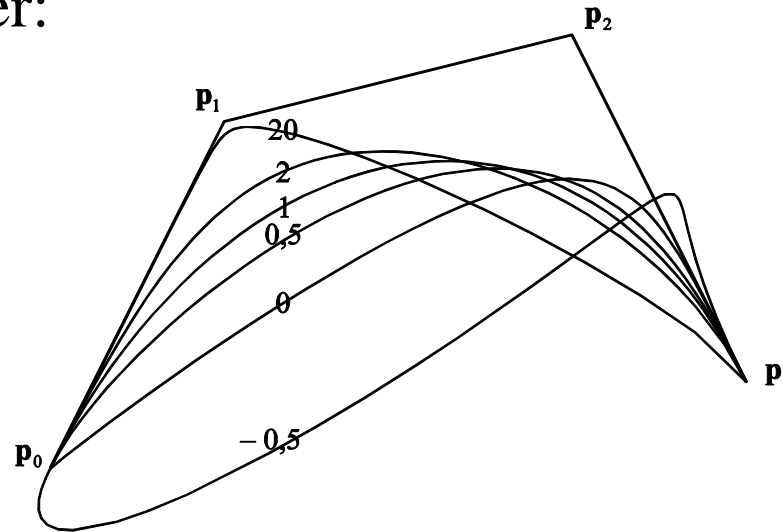
$$\mathbf{P}^r(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i} \sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i \mathbf{p}_i$$

Ρητές Καμπύλες Bézier (2)

- Η παραπάνω είναι μια ρητή καμπύλη Bézier βαθμού n , \mathbf{p}_i είναι τα καρτεσιανά σημεία ελέγχου και w_i τα αντίστοιχα βάρη
- w_i : δηλώνουν τη συνεισφορά του αντίστοιχου \mathbf{p}_i στην καμπύλη
- Όσο το w_i αυξάνει τόσο η καμπύλη έλκεται προς το \mathbf{p}_i
- Ενδιαφέρει ο λόγος των w_i και όχι οι ακριβείς τιμές τους
 - Κοινοί παράγοντες εξαλείφονται λόγω της διαίρεσης
- Αν όλα τα βάρη είναι ίσα έχουμε μία απλή καμπύλη Bézier
- Τα βάρη είναι θετικά \rightarrow αρνητικά βάρη έχουν απρόβλεπτο και ανεπιθύμητο αποτέλεσμα στο σχήμα της καμπύλης:
 - Δεν διατηρείται η ιδιότητα του κυρτού περιβλήματος
 - Μπορεί να δημιουργηθούν πόλοι, που κάνουν την καμπύλη να πηγαίνει στο άπειρο
- Τα βάρη προσφέρουν ένα επιπλέον επίπεδο τοπικού ελέγχου στο σχήμα της καμπύλης

Ρητές Καμπύλες Bézier (3)

- Αποτελέσματα από διαφορετικά βάρη στο σχήμα ρητής καμπύλης Bézier:



- Μια ρητή καμπύλη Bézier $\mathbf{P}^r(t)$ είναι η προοπτική προβολή της ομογενούς $\mathbf{P}^h(t)$, πάνω στο επίπεδο $w = 1$
- Οι ρητές καμπύλες Bézier διατηρούν τις περισσότερες ιδιότητες των κανονικών καμπυλών Bézier :
 - Κυρτού – περιβλήματος
 - Φθίνουσα διακύμανση } ισχύουν αν τα βάρη είναι μη αρνητικά

Ρητές Καμπύλες Bézier (4)

- Οι ρητές καμπύλες Bézier είναι αναλλοίωτες σε συσχετισμένους/προοπτικούς μετασχηματισμούς (αφού οι ίδιες είναι προβολές των ομογενών καμπυλών) → για την προβολή μιας ρητής καμπύλης Bézier αρκεί η προβολή των σημείων ελέγχου της
- Οι ρητές καμπύλες Bézier μπορούν να υπολογιστούν με τον αλγόριθμο *de Casteljau* για τα ομογενή σημεία ελέγχου \mathbf{p}_i^h και εκτελώντας στο τέλος ομογενής διαίρεση
- Εναλλακτικός τρόπος: εκτέλεση διαίρεσης σε κάθε βήμα:
 - Αριθμητική ακρίβεια
 - Αύξηση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας

Κωνικές τομές ως Ρητές Καμπύλες Bézier

- Κωνικές τομές είναι το αποτέλεσμα της τομής ενός επιπέδου με έναν κώνο σε διαφορετικές γωνίες
- Η αλγεβρική εξίσωση έχει τη μορφή:

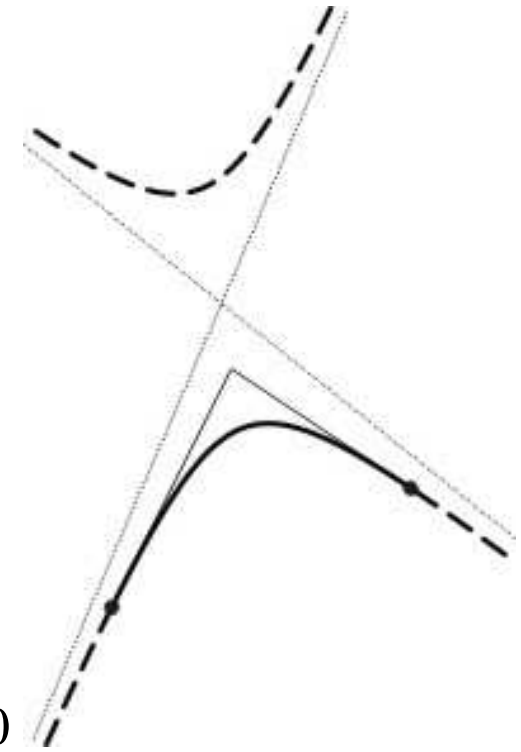
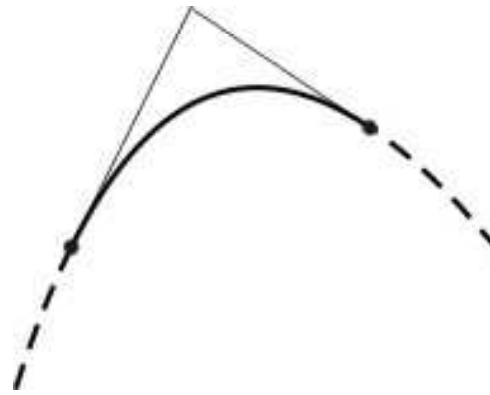
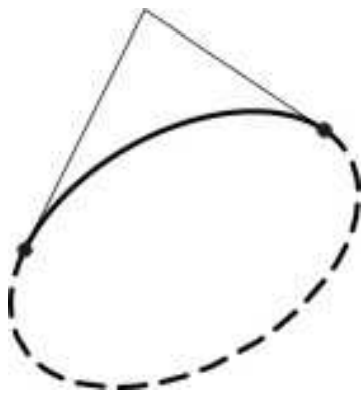
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

με τους παρακάτω περιορισμούς για κάθε είδος καμπύλης:

- Αν $B^2 - 4AC < 0$, η καμπύλη είναι έλλειψη
 - ◆ Αν επιπλέον, $B = 0$ και $A = C$, η καμπύλη είναι κύκλος
- Αν $B^2 - 4AC = 0$, η καμπύλη είναι παραβολή
- Αν $B^2 - 4AC > 0$, η καμπύλη είναι υπερβολή
- Η παραβολή είναι η μόνη κωνική τομή που μπορεί να αναπαρασταθεί με μη ρητή πολυωνυμική παραμετρική εξίσωση
- Οι άλλες κωνικές τομές αναπαρίστανται μόνο με ρητές καμπύλες (ρητές τετραγωνικές καμπύλες Bézier)

Κωνικές τομές σαν Ρητές Καμπύλες Bézier (2)

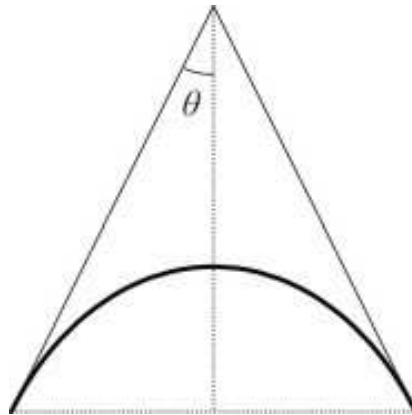
- Μια ρητή τετραγωνική καμπύλη Bézier με μη συγγραμικά σημεία ελέγχου \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 και αντίστοιχα βάρη w_0, w_1, w_2 είναι:
 - Ένα τμήμα έλλειψης, αν $|w_1| < 1$
 - Ένα τμήμα παραβολής, αν $|w_1| = 1$ (συνήθης καμπύλη Bézier)
 - Ένα τμήμα υπερβολής, αν $|w_1| > 1$



Πλήρη τμήματα: $w_1 > 0$; Διακεκομμένα τμήματα: $w_1 < 0$

Κωνικές τομές σαν Ρητές Καμπύλες Bézier (3)

- Τα κυκλικά τόξα είναι ιδιαίτερα σημαντικά
 - Το πολύγωνο ελέγχου πρέπει να είναι ισοσκελές τρίγωνο $|\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|$
 - $w_1 = \sin\theta$, όπου θ είναι η ημι-γωνία μεταξύ $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$



Ρητές Καμπύλες B-Spline - NURBS

- Έστω ακολουθία από σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_i, i=0, \dots, n$, ακολουθία από τα αντίστοιχα βάρη $w_i, i=0, \dots, n$ και μια ακολουθία κόμβων $t_i, i=0, \dots, n+k$. Τότε μια ρητή καμπύλη *B-Spline* βαθμού k δίνεται από:

$$\mathbf{Q}^r(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n N_i^n(t) w_i} \sum_{i=0}^n N_i^n(t) w_i \mathbf{p}_i$$

- Ρητές καμπύλες B-Spline με τυχαία ακολουθία κόμβων αναφέρονται ως NURBS (μη ομοιόμορφες ρητές B-Splines)
- Οι NURBS διατηρούν τις περισσότερες ιδιότητες των B-Splines:
 - Ισχυρού κυρτού – περιβλήματος
 - Ισχυρή φθίνουσα διακύμανσηισχύουν αν τα βάρη είναι μη αρνητικά
- Οι NURBS είναι αναλλοίωτες σε συσχετισμένους/προοπτικούς μετασχηματισμούς

Ρητές Καμπύλες B-Spline - NURBS (2)

- Τα βάρη έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τις καμπύλες Bézier → προσφέρουν ευελιξία στον σχεδιαστή
- Οι NURBS είναι οι πιο γενικές από όλες τις καμπύλες που έχουμε δει μέχρι τώρα
- Αναπαριστούν:
 - Απλές καμπύλες B-Spline (ίσα βάρη)
 - Απλές και ρητές καμπύλες Bézier
 - Κωνικές τομές
- Οι NURBS έχουν όλες τις ιδιότητες των υπόλοιπων τύπων καμπυλών
- Οι NURBS είναι το κύριο εργαλείο σε εφαρμογές γεωμετρικής σχεδίασης με υπολογιστή

Καμπύλες Παρεμβολής

- Οι καμπύλες Bézier και B-Spline είναι *προσεγγιστικές καμπύλες*:
 - Δεν διέρχονται από τα σημεία ελέγχου τους
 - Τα σημεία ελέγχου προσφέρουν μόνο μια ένδειξη του σχήματος
- Αναγκαία η κατασκευή *καμπυλών παρεμβολής*:
 - Καμπύλες που διέρχονται από δοσμένα σημεία
- Πρόβλημα παρεμβολής: αν δίνονται τα σημεία $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ και αντίστοιχες παραμετρικές τιμές t_0, t_1, \dots, t_n , να βρεθεί μια παραμετρική καμπύλη $\mathbf{P}(t)$ που να ικανοποιεί:

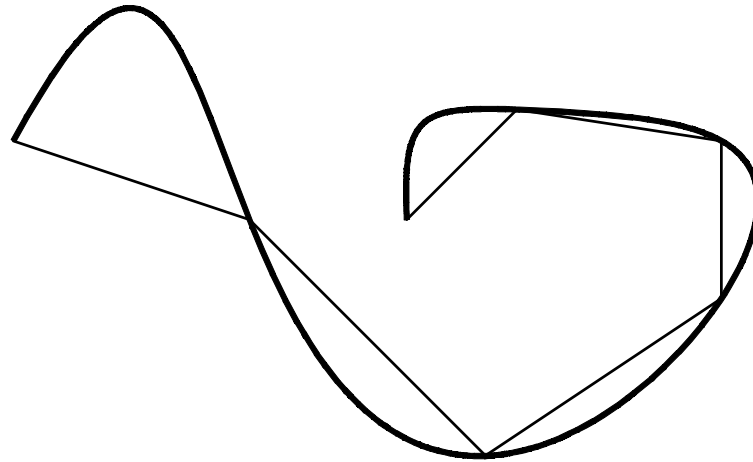
$$\mathbf{P}(t_i) = \mathbf{p}_i, i = 0, 1, \dots, n$$

Καμπύλες Παρεμβολής (2)

- Οι απλές μέθοδοι παρεμβολής δημιουργούν την $\mathbf{P}(t)$ ως μία ενιαία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού n
- Η $\mathbf{P}(t)$ είναι μια μοναδική καμπύλη
 - Ορίζεται από $(n+1)$ συντελεστές των αντίστοιχων πολυωνύμων, που υπολογίζονται ως η λύση του γραμμικού συστήματος $(n+1)$ εξισώσεων, που σχηματίζονται όπως φάνηκε παραπάνω
- Η λύση του γραμμικού συστήματος για την εύρεση της καμπύλης παρεμβολής δεν είναι πρακτική. Υπάρχουν άλλες μέθοδοι για την εύρεση της καμπύλης:
 - Άμεσα, με χρήση των πολυωνύμων Lagrange
 - Αναδρομικά, με χρήση του αλγορίθμου Aitken
- Οι μέθοδοι αυτές έχουν επίσης μειονεκτήματα:
 - Η παρεμβολή σημείων χρειάζεται πολυώνυμο υψηλού βαθμού \rightarrow σύνθετοι και αριθμητικώς ασταθείς υπολογισμοί
 - Η παραγόμενη καμπύλη έχει ταλαντώσεις και δεν ακολουθεί το πολύγωνο ελέγχου της

Καμπύλες Παρεμβολής (3)

- Παράδειγμα ταλάντωσης:



- Για να ξεπεράσουμε τα μειονεκτήματα:
η παρεμβολή γίνεται χρησιμοποιώντας καμπύλες αποτελούμενες από τμήματα χαμηλού βαθμού, ενωμένα με συνθήκες συνέχειας
 - Παρεμβολή με B-splines
 - Καμπύλες Hermite

Απλή Πολυωνυμική Παρεμβολή

- Ένας τρόπος κατασκευής καμπύλης παρεμβολής είναι η χρησιμοποίηση πολυωνύμων *Lagrange* βαθμού n :

$$L_i^n(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- Τότε η καμπύλη παρεμβολής είναι:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) \mathbf{p}_i(t)$$

- Το i -στο πολυώνυμο $L_i^n(t)$ είναι 0 σε κάθε κόμβο t_j εκτός από τον i -στο κόμβο t_i που είναι 1 \rightarrow η $\mathbf{P}(t)$ είναι μια καμπύλη παρεμβολής
- Περισσότερα χαρακτηριστικά:
 - *Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς*: ισχύει αφού τα πολυώνυμα Lagrange έχουν άθροισμα 1 \rightarrow η καμπύλη παρεμβολής είναι ένας βαρυκεντρικός συνδυασμός των σημείων ελέγχου

Απλή Πολυωνυμική Παρεμβολή (2)

- *Όχι ιδιότητα κυρτού περιβλήματος:* Τα πολυώνυμα Lagrange δεν είναι πάντοτε θετικά ούτε μικρότερα του 1 \rightarrow η καμπύλη δεν βρίσκεται στο κυρτό περίβλημα των σημείων ελέγχου της
 - *Γραμμική ακρίβεια:* αν όλα τα σημεία ελέγχου βρίσκονται σε ευθεία γραμμή, η καμπύλη έχει σχήμα ευθύγραμμου τμήματος
 - *Όχι ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης :* η καμπύλη μπορεί να παρουσιάζει ταλαντώσεις
- *Ο αλγόριθμος Aitken* προσφέρει μια αναδρομική σχέση υπολογισμού της καμπύλης παρεμβολής:

1. Για την τιμή t θέσε: $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$

2. Εκτέλεσε τα βήματα γραμμικής παρεμβολής:

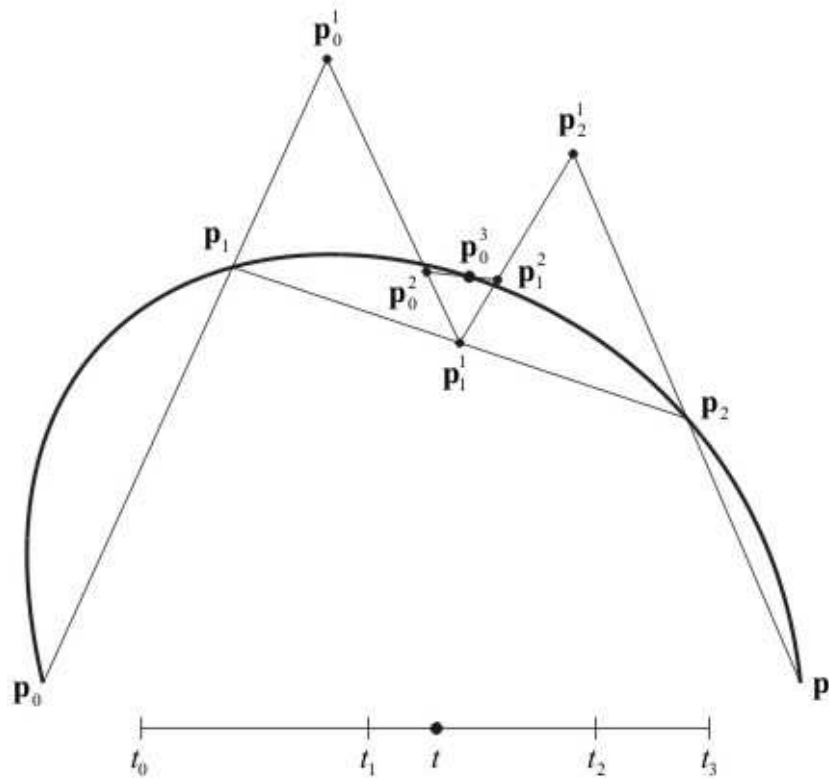
$$\mathbf{p}_i^r(t) = \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_i} \mathbf{p}_i^{r-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} \mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, n, \\ i = 0, 1, \dots, n - r \end{array}$$

3. Τότε, το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στην παραμετρική τιμή t είναι:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{p}_0^n(t)$$

Απλή Πολυωνυμική Παρεμβολή (3)

- Αλγόριθμος Aitken:



- Στα βήματα παρεμβολής η παράμετρος t δεν είναι πάντα στο $[t_i, t_{i+r}]$
→ τα ενδιάμεσα σημεία που δημιουργούνται σε ένα βήμα δεν είναι κυρτός συνδυασμός των σημείων του προηγούμενου βήματος

Κυβική Παρεμβολή Hermite

- Για να λύσουμε το πρόβλημα παρεμβολής χρειάζεται να βρούμε μια καμπύλη που να διέρχεται από δοσμένα σημεία
- Μπορούμε επίσης να αναζητήσουμε μια καμπύλη που να παρεμβάλλει άλλα στοιχεία όπως εφαπτόμενες
- Οι *κυβικές καμπύλες Hermite* πρέπει να παρεμβάλλουν δοσμένα σημεία και να έχουν σε αυτά δοσμένες εφαπτόμενες
- Πρόβλημα: Έστω 2 σημεία $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες $\overrightarrow{m}_0, \overrightarrow{m}_1$. Ψάχνουμε την κυβική καμπύλη Hermite $\mathbf{H}(t), t \in [0, 1]$ που ικανοποιεί:

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{H}'(0) = \overrightarrow{m}_0,$$

$$\mathbf{H}(1) = \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{H}'(1) = \overrightarrow{m}_1$$

- Εκφράζουμε την καμπύλη Hermite στη μορφή καμπύλης Bézier:

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{q}_i, \quad t \in [0, 1]$$

για άγνωστα σημεία ελέγχου \mathbf{q}_i

Κυβική Παρεμβολή Hermite (2)

- Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των καμπυλών Bézier:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{H}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \overrightarrow{\mathbf{m}}_0 = \mathbf{H}'(0) = 3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \Leftrightarrow \mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{m}}_0,$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{H}(1) = \mathbf{q}_3, \quad \overrightarrow{\mathbf{m}}_1 = \mathbf{H}'(1) = 3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2) \Leftrightarrow \mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{m}}_1$$

- Οπότε η καμπύλη είναι:

$$\mathbf{H}(t) = (1-t)^3 \mathbf{p}_0 + 3t(1-t)^2 \left(\mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{m}}_0 \right) + 3t^2(1-t) \left(\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{m}}_1 \right) + t^3 \mathbf{p}_1$$

- Η εκφραζόμενη σύμφωνα με τα συστατικά της:

$$\mathbf{H}(t) = H_0^3(t)\mathbf{p}_0 + H_1^3(t)\mathbf{p}_1 + H_2^3(t)\overrightarrow{\mathbf{m}}_0 + H_3^3(t)\overrightarrow{\mathbf{m}}_1, \quad t \in [0,1]$$

όπου $H_i^3(t)$ είναι τα κυβικά πολυώνυμα Hermite :

$$H_0^3(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad H_1^3(t) = -2t^3 + 3t^2,$$

$$H_2^3(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad H_3^3(t) = t^3 - t^2$$

- Αν η καμπύλη είναι ορισμένη σε τυχαίο παραμετρικό διάστημα $[a, b]$, οι σχέσεις αυτές πρέπει να αλλάξουν

Κυβική Παρεμβολή Hermite (3)

- Οι καμπύλες Hermite δεν είναι αναλλοίωτες σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς \rightarrow τα συστατικά τους πρέπει να αλλάζουν για να παραμείνει η καμπύλη ίδια, όταν η παράμετρος $t \in [0,1]$ αλλάζει σε $u \in [a, b]$:

- Θέτουμε $u = (1-t)a + tb$

- Οι εφαπτόμενες στα άκρα είναι :

$$\overrightarrow{\mathbf{m}}_0 = \mathbf{H}'(a) = \frac{1}{b-a} 3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0),$$

$$\overrightarrow{\mathbf{m}}_1 = \mathbf{H}'(b) = \frac{1}{b-a} 3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2)$$

- Όμοια με παραπάνω έχουμε:

$$\mathbf{H}(u) = H_0^3(u)\mathbf{p}_0 + H_1^3(u)\mathbf{p}_1 + H_2^3(u)(b-a)\overrightarrow{\mathbf{m}}_0 + H_3^3(u)(b-a)\overrightarrow{\mathbf{m}}_1, \quad u \in [a, b]$$

- Για να έχει η καμπύλη την επιθυμητή μορφή πρέπει να διαιρέσουμε με $(b-a)$
 - Φυσική εξήγηση: χρησιμοποιώντας την $\mathbf{H}(t)$, διατρέχουμε την καμπύλη σε μια μονάδα χρόνου; Αν θέλουμε να τη διατρέξουμε σε $(b-a)$ μονάδες, η ταχύτητα (που είναι οι εφαπτόμενες) πρέπει να διαιρεθούν κατά $(b-a)$

Κυβική Παρεμβολή Hermite (4)

Κατά τμήματα κυβική παρεμβολή Hermite :

- Η παρεμβολή μόνο 2 σημείων και των αντίστοιχων εφαπτόμενων δεν έχει πρακτικό ενδιαφέρον
- Μεγαλύτερο ενδιαφέρον έχει η κατασκευή μιας ομαλής καμπύλης που παρεμβάλλει μια ακολουθία σημείων $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ και τις αντίστοιχες εφαπτόμενες $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n$ στις παραμετρικές τιμές t_0, t_1, \dots, t_n
- Δυνατή η κατασκευή ως κατά τμήματα κυβική καμπύλη Hermite
- Κατασκευάζονται ανεξάρτητα τμήματα Hermite, ένα για κάθε παραμετρικό διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$
- Τα τμήματα αποτελούν μια C^1 -συνεχή καμπύλη αφού μοιράζονται τις εφαπτόμενες \mathbf{m}_i στα άκρα τους

- Κάθε τμήμα δίνεται από:

$$\mathbf{H}_i(u) = H_0^3(u)\mathbf{p}_i + H_1^3(u)\mathbf{p}_{i+1} + H_2^3(u)(t_{i+1} - t_i)\overline{\mathbf{m}}_i + H_3^3(u)(t_{i+1} - t_i)\overline{\mathbf{m}}_{i+1},$$

$$u \in [t_i, t_{i+1}]$$

Κυβική Παρεμβολή Hermite (5)

- Αυτή η κατασκευή της καμπύλης παρεμβολής παρέχει ευελιξία:
 - Επιτρέπει τη διαφοροποίηση του σχήματος της καμπύλης με την αλλαγή των εφαπτόμενων διανυσμάτων
 - Παρέχεται περισσότερη ευελιξία, αν απαιτούμε G^1 γεωμετρική συνέχεια στις ενώσεις, επιτρέποντας στα εφαπτόμενα διανύσματα στο τέλος του τμήματος και στην αρχή του επόμενου να είναι πολλαπλάσια μεταξύ τους και όχι ίσα

Κυβική Παρεμβολή Hermite (6)

Αυτόματη παραγωγή των εφαπτόμενων διανυσμάτων:

- Σε κάποιες περιπτώσεις, ο άμεσος ορισμός των εφαπτόμενων διανυσμάτων δεν είναι εύκολος ή επιθυμητός
- Χρειάζεται μια αυτόματη μέθοδος παραγωγής εφαπτόμενων διανυσμάτων
- Οι πιο απλές μέθοδοι ψάχνουν μια καμπύλη που να είναι C^1 συνεχής στις ενώσεις
- Πιο σύνθετες μέθοδοι, παράγουν C^2 συνεχή καμπύλη

Κυβική Παρεμβολή Hermite (7)

Μια μέθοδος παραγωγής εφαπτόμενων διανυσμάτων είναι να θέσουμε το $\vec{\mathbf{m}}_i$ παράλληλο στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο γειτονικά σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i+1}$:

$$\vec{\mathbf{m}}_i = \frac{1}{2}(1-c)(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

όπου c είναι μια σταθερά τάσης που επηρεάζει το μέτρο των εφαπτόμενων διανυσμάτων

- Οι καμπύλες που παράγονται με αυτή την εφαπτομένη ονομάζονται θεμελιώδεις *splines*
- Αν $c = 0$ τότε $\vec{\mathbf{m}}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1})$ και οι καμπύλες ονομάζονται *Catmull-Rom splines*
- Αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να προσδιορίσει εφαπτόμενες $\vec{\mathbf{m}}_0, \vec{\mathbf{m}}_n$ στα πρώτα και τελευταία σημεία ελέγχου

Κυβική Παρεμβολή Hermite (8)

Μια δεύτερη προσέγγιση είναι οι εφαπτόμενες *Bessel* :

- Το εφαπτόμενο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{m}}_i$ τίθεται ίσο με την εφαπτομένη της παραβολής που παρεμβάλλει τα τρία γειτονικά σημεία \mathbf{p}_{i-1} , \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{i+1}
- Αν $\mathbf{Q}_i(u)$, $u \in [t_i, t_{i+1}]$ είναι η παραβολή (υπολογίζεται με πολυώνυμα Lagrange ή τον αλγόριθμο Aitken) τότε:

$$\overrightarrow{\mathbf{m}}_i = \frac{d}{du} \mathbf{Q}_i(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

- Για το πρώτο και τελευταίο εφαπτόμενο διάνυσμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εφαπτόμενες της πρώτης και της τελευταίας παραβολής αντίστοιχα:

$$\overrightarrow{\mathbf{m}}_0 = \frac{d}{du} \mathbf{Q}_1(t_0) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\mathbf{m}}_n = \frac{d}{du} \mathbf{Q}_{n-1}(t_n)$$

Κυβική Παρεμβολή Hermite (9)

- Παρακάτω παρουσιάζονται οι εξισώσεις για τα εφαπτόμενα διανύσματα σε σχέση με τα στοιχεία της καμπύλης:

$$\vec{\mathbf{m}}_0 = \frac{-t_2 - t_1 + 2t_0}{(t_2 - t_0)(t_1 - t_0)} \mathbf{p}_0 + \frac{t_2 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_0)} \mathbf{p}_1 + \frac{t_1 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)} \mathbf{p}_2$$

$$\vec{\mathbf{m}}_i = \frac{t_{i+1} - t_i}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_i - t_{i-1})} \mathbf{p}_{i-1} + \frac{t_{i+1} - 2t_i + t_{i-1}}{(t_{i+1} - t_i)(t_i - t_{i-1})} \mathbf{p}_i + \frac{t_i - t_{i-1}}{(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_{i-1})} \mathbf{p}_{i+1}$$

$$\vec{\mathbf{m}}_n = \frac{t_n - t_{n-1}}{(t_n - t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})} \mathbf{p}_{n-2} - \frac{t_n - t_{n-2}}{(t_n - t_{n-1})(t_{n-1} - t_{n-2})} \mathbf{p}_{n-1} + \frac{2t_n - t_{n-1} - t_{n-2}}{(t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2})} \mathbf{p}_n$$

- Παρατηρείστε ότι οι εφαπτόμενες Bessel $\vec{\mathbf{m}}_0, \vec{\mathbf{m}}_n$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανεξάρτητα, για να συμπληρώσουν τις εφαπτόμενες των θεμελιωδών splines που αναφέρθηκαν παραπάνω

Κυβική Παρεμβολή Hermite (10)

- Οι δύο προηγούμενες μέθοδοι παράγουν C^1 συνεχείς καμπύλες
- Για τη δημιουργία C^2 συνεχούς καμπύλης, πρέπει οι δεύτερες παράγωγοι κάθε ζεύγους διαδοχικών τμημάτων να είναι ίσες στα σημεία ένωσης
- Αν $\mathbf{H}_i(u)$, $u \in [t_i, t_{i+1}]$ είναι το τμήμα που παρεμβάλλει τα \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{i+1} πρέπει να ισχύει:

$$\frac{d^2}{du^2} \mathbf{H}_{i-1}(t_i) = \frac{d^2}{du^2} \mathbf{H}_i(t_i)$$

- Χρησιμοποιώντας :

$$\mathbf{H}(u) = H_0^3(u)\mathbf{p}_0 + H_1^3(u)\mathbf{p}_1 + H_2^3(u)(b-a)\overrightarrow{\mathbf{m}}_0 + H_3^3(u)(b-a)\overrightarrow{\mathbf{m}}_1, \quad u \in [a, b]$$

παραγωγίζουμε δύο φορές τα τμήματα της καμπύλης Hermite :

$$(t_{i+1} - t_i)\overrightarrow{\mathbf{m}}_{i-1} + 2(t_{i+1} - t_{i-1})\overrightarrow{\mathbf{m}}_i + (t_i - t_{i-1})\overrightarrow{\mathbf{m}}_{i+1} = 3\frac{t_{i+1} - t_i}{t_i - t_{i-1}}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) + 3\frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_i}(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$$

- Η σχέση ισχύει για $i=1,2,\dots,n-1$ δίνοντας $(n-1)$ εξισώσεις για τον υπολογισμό $(n+1)$ εφαπτόμενων διανυσμάτων \mathbf{m}_i , $i=0,1,\dots,n$

Κυβική Παρεμβολή Hermite (11)

- Χρειάζονται δύο επιπλέον συνθήκες
- Συνήθως εφαρμογή κριτηρίων στα άκρα της καμπύλης, από τις οποίες υπολογίζονται οι τιμές των $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_n$
- Εύκολη μέθοδος:
 - Ο χρήστης παρέχει τυχαίες τιμές για τα 2 εφαπτόμενα διανύσματα
- Εναλλακτική:
 - Γεωμετρικά κριτήρια, που λαμβάνουν υπόψη το σχήμα της καμπύλης κοντά στα άκρα
- Έστω ότι τα $\overrightarrow{\mathbf{m}}_0, \overrightarrow{\mathbf{m}}_n$ είναι γνωστά
- Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εξίσωση, τα γραμμικό σύστημα που πρέπει να λυθεί είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{m}}_0 \\ \overrightarrow{\mathbf{m}}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\mathbf{m}}_{n-1} \\ \overrightarrow{\mathbf{m}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{c}}_0 \\ \overrightarrow{\mathbf{c}}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\mathbf{c}}_{n-1} \\ \overrightarrow{\mathbf{c}}_n \end{bmatrix}$$

Κυβική Παρεμβολή Hermite (12)

όπου:

$$\alpha_i = (t_{i+1} - t_i), \quad \mathbf{c}_0 = \overrightarrow{\mathbf{m}_0}$$

$$\beta_i = 2(t_{i+1} - t_{i-1}), \quad \mathbf{c}_i = 3 \frac{t_{i+1} - t_i}{t_i - t_{i-1}} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) + 3 \frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_i} (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$$

$$\gamma_i = (t_i - t_{i-1}), \quad \mathbf{c}_n = \overrightarrow{\mathbf{m}_n}$$

- Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα $\overrightarrow{\mathbf{m}_i}$ ώστε η καμπύλη παρεμβολή να είναι C^1 συνεχής
- Το σύστημα πάντα έχει μια μοναδική λύση
- Είναι τριδιαγώνιο σύστημα \rightarrow λύνεται αποδοτικά χρησιμοποιώντας μια άμεση μέθοδος όπως η LU

Κυβική Παρεμβολή Hermite (13)

Συνθήκες άκρων για C^2 κατά τμήματα παρεμβολή Hermite:

- Οι επιπλέον συνθήκες που είναι απαραίτητες για τον ορισμό των εφαπτόμενων για C^2 κατά τμήματα καμπύλες Hermite εμπλέκουν τα εφαπτόμενα διανύσματα $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_n$
→ ονομάζονται *συνοριακές συνθήκες*
- *Συνοριακές συνθήκες Bessel :*
 - Χρησιμοποιούνται οι εφαπτόμενες Bessel, για τα $\vec{\mathbf{m}}_0, \vec{\mathbf{m}}_n$, που δόθηκαν προηγουμένως, ώστε οι εφαπτόμενες στα άκρα να είναι εκείνες των παραβολών που παρεμβάλουν τα 3 πρώτα και τελευταία σημεία ελέγχου
 - Αρκεί να αντικαταστήσουμε τα $\vec{\mathbf{c}}_0, \vec{\mathbf{c}}_n$ στο προηγούμενο γραμμικό σύστημα με αυτές τις εκφράσεις

Κυβική Παρεμβολή Hermite (14)

- *Τετραγωνική οριακή συνθήκη:*
 - Απαιτεί οι δεύτερες παράγωγοι της καμπύλης παρεμβολής στους δύο πρώτους (και στους δύο τελευταίους) κόμβους να είναι ίσες:

$$\frac{d^2}{du^2} \mathbf{H}_0(t_0) = \frac{d^2}{du^2} \mathbf{H}_0(t_1) \quad \text{και} \quad \frac{d^2}{du^2} \mathbf{H}_{n-1}(t_{n-1}) = \frac{d^2}{du^2} \mathbf{H}_{n-1}(t_n)$$

- Με διπλή παραγωγή της καμπύλης Hermite, συνεπάγεται:

$$\overrightarrow{\mathbf{m}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{m}}_1 = 2 \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{t_1 - t_0} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\mathbf{m}}_{n-1} + \overrightarrow{\mathbf{m}}_n = 2 \frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$$

- Αυτές οι σχέσεις εισάγονται στο γραμμικό σύστημα, αντικαθιστώντας την πρώτη και τελευταία γραμμή
- Το σύστημα παραμένει τριδιαγώνιο και μετά τις αλλαγές \rightarrow λύνεται αποδοτικά

Κυβική Παρεμβολή Hermite (15)

- *Φυσική οριακή συνθήκη:*
 - Απαιτεί οι δεύτερες παράγωγοι να είναι ίσες με 0 στα άκρα της καμπύλης
 - Τότε η καμπύλη παρεμβολής γίνεται μια ευθεία γραμμή κοντά στα άκρα (επιθυμητό ή όχι, ανάλογα με την εφαρμογή)
 - Η παραγόμενη καμπύλη μοιάζει με τη μηχανική (φυσική) spline, που είναι καρφωμένη στα άκρα οπότε η καμπυλότητά της μηδενίζεται
 - Παρόμοια με την τετραγωνική οριακή συνθήκη έχουμε:

$$2\vec{\mathbf{m}}_0 + \vec{\mathbf{m}}_1 = 3 \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{t_1 - t_0} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{m}}_{n-1} + 2\vec{\mathbf{m}}_n = 3 \frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$$

- Αντικαθιστούμε την πρώτη και τελευταία εξίσωση στο γραμμικό σύστημα, με τις παραπάνω ισότητες

Κυβική Παρεμβολή B-Spline

- Θα δείξουμε πώς δημιουργούμε μια κυβική καμπύλη B-Spline που παρεμβάλλει ένα σύνολο δοσμένων σημείων
- Η καμπύλη παρεμβολής B-Spline θα αναφέρεται ως $Q(t)$
- Οι παραμετρικές τιμές t_i , στις οποίες η καμπύλη παρεμβάλλει τα σημεία \mathbf{p}_i ,

$$Q(t_i) = \mathbf{p}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

χρησιμοποιούνται επίσης ως κόμβοι της καμπύλης B-Spline

- Στόχος: εύρεση των σημείων ελέγχου \mathbf{q}_i της καμπύλης B-Spline
- Έστω ότι τα \mathbf{p}_i είναι μεταξύ τους διαφορετικά \rightarrow τα t_i πρέπει να είναι διαφορετικά μεταξύ τους
- Το πρώτο και τελευταίο σημείο παρεμβάλλονται εύκολα, αν χρησιμοποιηθεί μια ανοικτή ακολουθία κόμβων
- Για αυτό, προσθέτουμε κόμβους $t_{-2}, t_{-1}, t_{n+1}, t_{n+2}$ έτσι ώστε:

$$t_{-2} = t_{-1} = t_0 \quad \text{και} \quad t_n = t_{n+1} = t_{n+2}$$

Κυβική Παρεμβολή B-Spline (2)

- Αν δίνεται αυτή η ακολουθία κόμβων, τα σημεία ελέγχου είναι $\mathbf{q}_i, i=-3, \dots, n-1$ (οι δείκτες προκύπτουν από τους δείκτες των κόμβων)
- Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου είναι ήδη γνωστά:

$$\mathbf{q}_{-3} = \mathbf{p}_0 \text{ και } \mathbf{q}_{n-1} = \mathbf{p}_n$$

- Για τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου, χρησιμοποιούμε τον ορισμό της κυβικής καμπύλης B-Spline :

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{Q}(t_j) = \sum_{i=-3}^{n-1} N_i^3(t_j) \mathbf{q}_i, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\mathbf{E})$$

- Η τιμή της κυβικής B-Spline συνάρτησης βάσης $N_i^3(t)$ στους κόμβους t_j υπολογίζεται ως εξής:

- Αρχικά, υπολογίζουμε την τετραγωνική B-Spline συνάρτηση βάσης στους κόμβους:

$$N_i^2(t_j) = \begin{cases} 0, & j = 1, \\ \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+2} - t_i}, & j = i + 1, \\ \frac{t_{i+3} - t_{i+2}}{t_{i+3} - t_{i+1}}, & j = i + 2, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Κυβική Παρεμβολή B-Spline (3)

- Ύστερα εφαρμόζουμε:

$$N_i^r(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(t) + \frac{t_{i+r+1} - t}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(t)$$

και έτσι έχουμε:

$$N_i^2(t_j) = \begin{cases} \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+3} - t_i} \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+2} - t_i}, & j = i + 1, \\ \frac{t_{i+2} - t_i}{t_{i+3} - t_i} \frac{t_{i+3} - t_{i+2}}{t_{i+3} - t_{i+1}} + \frac{t_{i+4} - t_{i+2}}{t_{i+4} - t_{i+1}} \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+3} - t_{i+1}}, & j = i + 2, \\ \frac{t_{i+4} - t_{i+3}}{t_{i+4} - t_{i+1}} \frac{t_{i+4} - t_{i+3}}{t_{i+4} - t_{i+2}}, & j = i + 3, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Κυβική Παρεμβολή B-Spline (4)

- Τέλος, αλλάζουμε τους δείκτες για να πάρουμε $N_i^3(t)$ για σταθερό j και για κατάλληλο i :

$$N_{j-1}^3(t_j) = \frac{t_j - t_{j-1}}{t_{j+2} - t_{j-1}} \frac{t_j - t_{j-1}}{t_{j+1} - t_{j-1}},$$

$$N_{j-2}^3(t_j) = \frac{t_j - t_{j-2}}{t_{j+1} - t_{j-2}} \frac{t_{j+1} - t_j}{t_{j+1} - t_{j-1}} + \frac{t_{j+2} - t_j}{t_{j+2} - t_{j-1}} \frac{t_j - t_{j-1}}{t_{j+1} - t_{j-1}},$$

$$N_{j-3}^3(t_j) = \frac{t_{j+1} - t_j}{t_{j+1} - t_{j-2}} \frac{t_{j+1} - t_j}{t_{j+1} - t_{j-1}},$$

- Επομένως, η **(E)** γίνεται:

$$\mathbf{p}_j = N_{j-3}^3(t_j)\mathbf{q}_{j-3} + N_{j-2}^3(t_j)\mathbf{q}_{j-2} + N_{j-1}^3(t_j)\mathbf{q}_{j-1}$$

Κυβική Παρεμβολή B-Spline (5)

- Αντικαθιστώντας το $N_i^3(t_j)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{(t_{j+1} - t_j)^2}{t_{j+1} - t_{j-1}} \mathbf{q}_{j-3} \\ & + \left[\frac{(t_j - t_{j-2})(t_{j+1} - t_j)}{t_{j+1} - t_{j-2}} + \frac{(t_{j+2} - t_j)(t_j - t_{j-1})}{t_{j+2} - t_{j-1}} \right] \mathbf{q}_{j-2} \\ & + \frac{(t_j - t_{j-1})^2}{t_{j+2} - t_{j-1}} \mathbf{q}_{j-1} = (t_{j+1} - t_{j-1}) \mathbf{p}_j \end{aligned}$$

- Οι παραπάνω εκφράσεις μαζί με τις σχέσεις: $\mathbf{q}_{-3} = \mathbf{p}_0$ και $\mathbf{q}_{n-1} = \mathbf{p}_n$ δίνουν ένα γραμμικό σύστημα με $(n+1)$ αγνώστους για τον υπολογισμό των $(n+3)$ σημείων ελέγχου \rightarrow χρειάζονται 2 παραπάνω συνθήκες
- Παρόμοια όπως όταν απαιτούσαμε η καμπύλη παρεμβολής Hermite να είναι C^2 στις ενώσεις των τμημάτων της

Κυβική Παρεμβολή B-Spline (6)

- Το παραπάνω δεν είναι τυχαίο, αφού και στις 2 περιπτώσεις ψάχνουμε μια κατά τμήματα κυβική καμπύλη που είναι C^2 συνεχής και παρεμβάλλει $(n+1)$ δοσμένα σημεία
- Διαφορά:
 - Στην 1^η περίπτωση, η καμπύλη εκφράζεται ως κατά τμήματα καμπύλη Hermite
 - Στη 2^η περίπτωση, εκφράζεται ως καμπύλη B-Spline
- Θεωρούμε ότι τα $\mathbf{q}_{-2}, \mathbf{q}_{-1}$ είναι γνωστά
- Το γραμμικό σύστημα γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{-3} \\ \mathbf{q}_{-2} \\ \mathbf{q}_{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n-3} \\ \mathbf{q}_{n-2} \\ \mathbf{q}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ (t_2 - t_0)\mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ (t_n - t_{n-2})\mathbf{p}_{n-1} \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$$

Κυβική Παρεμβολή B-Spline (7)

όπου θέτουμε $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ τους συντελεστές των $\mathbf{q}_{j-3}, \mathbf{q}_{j-2}, \mathbf{q}_{j-1}$ αντίστοιχα και $\mathbf{r}_1 = \mathbf{q}_{-2}$ και $\mathbf{r}_2 = \mathbf{q}_{n-2}$

- Είναι τριδιαγώνιο σύστημα \rightarrow λύνεται αποδοτικά χρησιμοποιώντας κάποια άμεση μέθοδο όπως η LU

Συνοριακές συνθήκες:

- Για την παρεμβολή με καμπύλη B-Spline, οι συνοριακές συνθήκες απαιτούν τη συμπλήρωση του γραμμικού συστήματος για την εύρεση του δεύτερου και του προτελευταίου σημείου ελέγχου $\mathbf{q}_{-2}, \mathbf{q}_{n-2}$
- Παρόμοιες μέθοδοι για τις συνοριακές συνθήκες όπως στην κυβική παρεμβολή Hermite
- Διαφορά:
 - Οι ισότητες εκφράζονται συναρτήσει των δοσμένων σημείων \mathbf{p}_i αντί των εφαπτόμενων διανυσμάτων

Κυβική Παρεμβολή B-Spline (8)

- Συνοριακές συνθήκες Bessel:

- Στην αρχή της καμπύλης η εφαπτομένη είναι

$$\mathbf{Q}'(t_0) = \frac{3}{t_1 - t_0} (\mathbf{q}_{-2} - \mathbf{q}_{-3}) = \frac{3}{t_1 - t_0} (\mathbf{q}_{-2} - \mathbf{p}_0)$$

- Εξισώνοντας με:

$$\overrightarrow{\mathbf{m}}_0 = \frac{-t_2 - t_1 + 2t_0}{(t_2 - t_0)(t_1 - t_0)} \mathbf{p}_0 + \frac{t_2 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_0)} \mathbf{p}_1 + \frac{t_1 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)} \mathbf{p}_2$$

παίρνουμε:

$$\mathbf{q}_{-2} = \frac{1}{3} \left(\frac{2t_2 - t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \mathbf{p}_0 - \frac{t_2 - t_0}{t_2 - t_1} \mathbf{p}_1 - \frac{(t_1 - t_0)^2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)} \mathbf{p}_2 \right)$$

- Όμοια για το τέλος της καμπύλης παίρνουμε:

$$\mathbf{q}_{n-2} = \frac{1}{3} \left(-\frac{(t_{n-1} - t_n)^2}{(t_{n-2} - t_{n-1})(t_{n-2} - t_n)} \mathbf{p}_n + \frac{t_{n-2} - t_n}{t_{n-2} - t_{n-1}} \mathbf{p}_{n-1} + \frac{2t_{n-2} - t_{n-1} - t_n}{t_{n-2} - t_n} \mathbf{p}_n \right)$$

- Οι εκφράσεις για τα \mathbf{q}_{-2} , \mathbf{q}_{n-2} αντικαθιστούν τα \mathbf{r}_1 και \mathbf{r}_2 στο γραμμικό σύστημα

Κυβική Παρεμβολή B-Spline (9)

- *Τετραγωνική οριακή συνθήκη:*
 - Γράφουμε το πρώτο (και όμοια το τελευταίο) τμήμα της καμπύλης B-Spline, ορισμένο σε παραμετρικό διάστημα $[t_0, t_1]$, σαν μια κυβική καμπύλη Bézier και την παραγωγίζουμε 2 φορές:

$$\mathbf{q}_{-2} - \mathbf{q}_{-1} = \frac{t_2 - t_0}{3(t_1 - t_0)} (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)$$

$$\mathbf{q}_{n-3} - \mathbf{q}_{n-2} = \frac{t_n - t_{n-2}}{3(t_n - t_{n-1})} (\mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{p}_n)$$

- Οι παραπάνω αντικαθιστούν την δεύτερη και την προτελευταία ισότητα του συστήματος
- Το σύστημα παραμένει τριδιαγώνιο και μετά τις αλλαγές
- *Φυσική οριακή συνθήκη:*
 - Εφαρμόζεται με όμοιο τρόπο και οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι:

$$(t_2 + t_1 - 2t_0)\mathbf{q}_{-2} - (t_1 - t_0)\mathbf{q}_{-1} = (t_2 - t_0)\mathbf{p}_0$$

$$(t_n - t_{n-1})\mathbf{q}_{n-3} - (2t_n - t_{n-1} - t_{n-2})\mathbf{q}_{n-2} = -(t_n - t_{n-2})\mathbf{p}_n$$

Παραμετροποιήσεις των κατά τμήματα Καμπυλών Παρεμβολής

- Ο χρήστης συνήθως δίνει τα σημεία που παρεμβάλλει η καμπύλη
- Τότε, οι απαιτούμενοι κόμβοι μπορούν να υπολογίζονται αλγοριθμικά
 - χρησιμοποιούμε τα δοσμένα σημεία για να παραγάγουμε καλύτερα σχηματισμένες καμπύλες
- Οι μέθοδοι παραμετροποίησης για τις καμπύλες B-Spline, μπορούν να εφαρμοστούν και σε αυτή την περίπτωση
- Η ομοιόμορφη παραμετροποίηση είναι η πιο απλή
 - Οι κόμβοι ισαπέχουν
- Η ομοιόμορφη χρησιμοποιείται στην πράξη, αν και άλλες μέθοδοι παράγουν καλύτερες καμπύλες:
 - Απλοποιεί τα γραμμικά συστήματα που παράγουν τις C^2 κυβικές καμπύλες παρεμβολής
- Πιο σύνθετες παραμετροποιήσεις (για την απόκτηση πιο λείων καμπυλών), κατασκευάζονται με τη χρήση των δοσμένων σημείων παρεμβολής \mathbf{p}_i

Παραμετροποιήσεις των κατά τμήματα Καμπυλών Παρεμβολής (2)

- Η παραμετροποίηση μήκους χορδής υπολογίζεται από:

$$\frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} = \frac{|\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1}|}{|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|}$$

- Η κεντρομόλος παραμετροποίηση υπολογίζεται από:

$$\frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1}|}{|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|}}$$

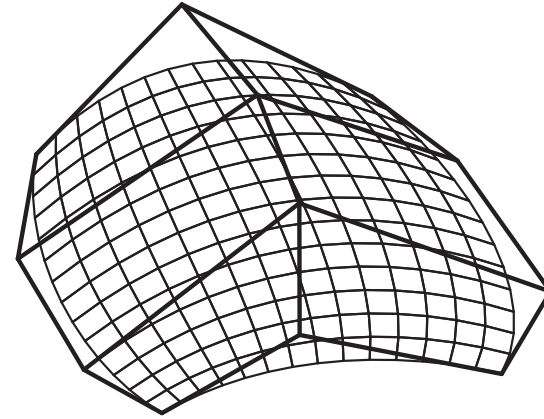
- Και στις 2 περιπτώσει, η τιμή του αρχικού κόμβου t_0 ορίζεται αυθαίρετα
- Σημείωση:
 - Οι παραμετροποιήσεις B-Spline χρησιμοποιούν τα σημεία ελέγχου της καμπύλης

Αλλά:

- Οι παραμετροποιήσεις των καμπυλών παρεμβολής χρησιμοποιούν τα σημεία που παρεμβάλλονται \rightarrow το σχήμα της καμπύλης ακολουθεί τα σημεία αυτά

Επιφάνειες

- Οι καμπύλες Bézier και B-spline χρησιμοποιούνται για την παραγωγή επιφανειών
- Οι πιο απλοί τύποι:
 - Επιφάνειες Bézier τανυστικό γινόμενο
 - Επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο
- Είναι απλές γενικεύσεις των αντίστοιχων καμπυλών
- Κληρονομούν τις περισσότερες από τις ιδιότητές τους



Επιφάνειες Bézier Τανυστικά Γινόμενα

- Θεωρούμε μια καμπύλη Bézier βαθμού m με σημεία ελέγχου \mathbf{p}_i , $i=0,1,\dots,m$ ως προς την παράμετρο u :

$$\mathbf{P}^m(u) = \sum_{i=0}^m B_i^m(u) \mathbf{p}_i, \quad u \in [0,1] \quad (1)$$

- Κάθε σημείο ελέγχου \mathbf{p}_i διαγράφει μια καμπύλη Bézier βαθμού n με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{i,j}$, $j=0,1,\dots,n$ ως προς την παράμετρο v :

$$\mathbf{P}_i^n(v) = \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \mathbf{p}_{i,j}, \quad v \in [0,1] \quad (2)$$

- Κάθε σημείο της αρχικής καμπύλης διαγράφει μια καμπύλη Bézier βαθμού n .
- Όλες οι καμπύλες παράγουν μια επιφάνεια Bézier τανυστικό γινόμενο
- Αντικαθιστούμε τα σημεία \mathbf{p}_i στη (1) με την καμπύλη $\mathbf{P}_i^n(v)$ που διαγράφει η επιφάνεια
- Η εξίσωση της επιφάνειας $\mathbf{P}^{m,n}(u,v)$ βαθμού m ως προς u και βαθμού n ως προς v είναι:

$$\mathbf{P}^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m B_i^m(u) \left(\sum_{j=0}^n B_j^n(v) \mathbf{p}_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{p}_{i,j}, \quad u \in [0,1], v \in [0,1] \quad (3)$$

Επιφάνειες Bézier Τανυστικά Γινόμενα (2)

- Σημεία ελέγχου (ή πλέγμα ελέγχου): τα $(m+1) \times (n+1)$ σημεία ελέγχου που χρησιμοποιούνται για τον ορισμό της επιφάνειας
- Μπορούν να αναγραφούν σε μια ορθογώνια διάταξη:

	$v \rightarrow$					
u	↓	$\mathbf{p}_{0,0}$	$\mathbf{p}_{0,1}$	\dots	$\mathbf{p}_{0,n}$	(T)
		$\mathbf{p}_{1,0}$	$\mathbf{p}_{1,1}$	\dots	$\mathbf{p}_{1,n}$	
		\vdots	\vdots	\dots	\vdots	
		$\mathbf{p}_{m,0}$	$\mathbf{p}_{m,1}$	\dots	$\mathbf{p}_{m,n}$	

- Συνοριακές καμπύλες των επιφανειών Bézier: οι ισοπαραμετρικές καμπύλες που αντιστοιχούν στα $u=0$, $u=1$, $v=0$ και $v=1$
- Η κατασκευή είναι συμμετρική: κατασκευάζεται η ίδια επιφάνεια αρχίζοντας από οποιαδήποτε συνοριακή καμπύλη

Αλγόριθμος de Casteljau

- Για τον υπολογισμό ενός σημείου $\mathbf{P}^{m,n}(u,v)$ μιας επιφάνειας Bézier :
 - Εφαρμογή του αλγορίθμου de Casteljau σε κάθε γραμμή του (T) ως προς v
 - Υπολογίζονται $(m+1)$ σημεία, που είναι τα σημεία ελέγχου της ισοπαραμετρικής καμπύλης που αντιστοιχεί στο v
 - Εφαρμογή ξανά του αλγορίθμου de Casteljau σε αυτά τα σημεία ως προς u
 - Το αποτέλεσμα είναι το σημείο $\mathbf{P}^{m,n}(u,v)$

Αλγόριθμος de Casteljau (2)

Ο Αλγόριθμος de Casteljau για Επιφάνειες Bézier Τανυστικό Γινόμενο:

```
point bezierSurfacePoint ( int m, int n,  
                           point[][] controlPt,  
                           float u, float v )  
{  
    point tmpPt[n+1];  
    point curvePt[n+1];  
  
    for (i=0; i <= m; i++) {  
        for (j=0; j <= n; j++) {  
            tmpPt[j] = controlPt[i][j];  
        }  
        curvePt[i] = bezierPoint(n, tmpPt, v);  
    }  
    return bezierPoint(m, curvePt, u);  
}
```

Επιφάνειες Bézier Τανυστικά Γινόμενα :Ιδιότητες

- Οι ιδιότητες είναι γενικεύσεις των ιδιοτήτων των καμπυλών Bézier :
- Οι επιφάνειες Bézier:
 - Έχουν την ιδιότητα του κυρτού περιβλήματος
 - Είναι αναλλοίωτες σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς
 - Είναι αναλλοίωτες σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς των παραμέτρων
 - Έχουν συμμετρία σε σχέση με τα σημεία ελέγχου τους
 - Έχουν γραμμική ακρίβεια
 - Έχουν την ιδιότητα της παρεμβολής των ακραίων σημείων ελέγχου
 - Έχουν ψευδο-τοπικό έλεγχο
- Οι επιφάνειες δεν έχουν την ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης
- Οι μερικές παράγωγοι είναι οι εφαπτόμενες των ισοπαραμετρικών καμπυλών της επιφάνειας
- Οι μερικές παράγωγοι ως προς u είναι:

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{P}^{m,n}(u, v) = \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \left(\frac{\partial}{\partial u} \sum_{i=0}^m B_i^m(u) \mathbf{p}_{i,j} \right)$$

Υποδιαίρεση Επιφανειών Bézier

- Γενίκευση της υποδιαίρεσης καμπυλών Bézier
- Επιλέγεται ένα ζεύγος τιμών (u_0, v_0) και η επιφάνεια υποδιαιρείται σε 4 υπο-επιφάνειες του ίδιου τύπου
- Τα σημεία ελέγχου των υπο-επιφανειών παράγονται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο de Casteljau:
 - Εφαρμογή του αλγορίθμου de Casteljau σε κάθε γραμμή του (T)
 - Κάθε μια από τις καμπύλες υποδιαιρείται σε “αριστερό” και “δεξί” τμήμα
 - Κάθε τμήμα έχει $(m+1) \times (n+1)$ σημεία ελέγχου
 - Εφαρμογή του αλγορίθμου de Casteljau σε $2 \times (m+1) \times (n+1)$ στήλες των σημείων ελέγχου
 - Κάθε τμήμα υποδιαιρείται σε «άνω» και «κάτω» τμήμα
 - Κάθε νέο τμήμα (σύνολο 4) έχει $(m+1) \times (n+1)$ σημεία ελέγχου

Υποδιαίρεση Επιφανειών Bézier (2)

- Εφαρμογές:
 - Σχεδίαση μιας επιφάνειας Bézier :
Αν τα σημεία ελέγχου είναι συνεπίπεδα
σχεδίασε το πολύγωνο που ορίζεται από τα 4 ακραία σημεία ελέγχου
αλλιώς
υποδιαίρεσε την επιφάνεια σε 4 υπο-επιφάνειες για ένα τυχαίο ζευγάρι (u_0, v_0)
εκτέλεσε την ίδια διαδικασία αναδρομικά για την κάθε υπο-επιφάνεια
 - Εύρεση τομών μεταξύ μιας επιφάνειας Bézier και μιας ευθείας ή ενός επιπέδου

Επιφάνειες B-Spline Τανυστικό Γινόμενο

- Είναι λείες επιφάνειες που κατασκευάζονται με την ένωση επιφανειών χαμηλού βαθμού με κατάλληλες συνθήκες συνέχειας
- Κατασκευάζεται από παραμετρικές επιφάνειες:
 - Βαθμού k ως προς u
 - Βαθμού l ως προς vενωμένες με συνέχεια:
 - C^{k-1} ως προς u
 - C^{l-1} ως προς v
- Έχει συνολικά $(m+1) \times (n+1)$ σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{i,j}$
- Τα m και n είναι ανεξάρτητα των βαθμών k και l της επιφάνειας
- Έχει 2 σύνολα κόμβων:
 - u_1, u_2, \dots, u_{m+k} για u
 - v_1, v_2, \dots, v_{n+l} για v

Επιφάνειες B-Spline Τανυστικό Γινόμενο(2)

- Δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{Q}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_i^k(u) N_j^\ell(v) \mathbf{p}_{i,j}$$

- Το πεδίο ορισμού της επιφάνειας είναι $[u_k, u_{m+1}] \times [v_l, v_{n+1}]$
- Διάταξη που δείχνει τα σημεία ελέγχου μιας επιφάνειας B-spline :

	v_1	\dots	v_n	\dots	$v_{n+\ell}$
	$\mathbf{p}_{0,0}$	$\mathbf{p}_{0,1}$	\dots	$\mathbf{p}_{0,n}$	
u_1	$\mathbf{p}_{1,0}$	$\mathbf{p}_{1,1}$	\dots	$\mathbf{p}_{1,n}$	
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
u_m	$\mathbf{p}_{m,0}$	$\mathbf{p}_{m,1}$	\dots	$\mathbf{p}_{m,n}$	
\vdots					
u_{m+k}					

Ο Αλγόριθμος de Boor

- Υπολογισμός ενός σημείου $Q(u, v)$ στην επιφάνεια B-spline τανυστικό γινόμενο:
 - Βρες το διάστημα $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ στο οποίο ανήκει το (u, v)
 - Εφαρμογή του αλγορίθμου de Boor σε κάθε μια από τις γραμμές του πλέγματος ελέγχου για την τιμή $v \in [v_j, v_{j+1}]$
 - Έτσι παράγονται $(m+1)$ σημεία
 - Εφαρμογή του αλγορίθμου de Boor για καθένα από τα $(m+1)$ σημεία για $u \in [u_i, u_{i+1}]$
- Η διαδικασία μπορεί αρχικά να γίνει ως προς u (στήλες του πλέγματος ελέγχου) και στη συνέχεια ως προς v χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα.

Κόμβοι και Παραμετροποιήσεις

- Οι δύο ακολουθίες κόμβων, ως προς u και v , διατηρούν όλες τις ιδιότητες της ακολουθίας κόμβων μίας καμπύλης B-spline
- Είναι δύσκολη η αυτόματη εύρεση ακολουθιών κόμβων
- Η εισαγωγή κόμβου δεν είναι δύσκολη και χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο Boehm
- Ένας κόμβος μπορεί να εισαχθεί ανεξάρτητα σε οποιαδήποτε από τις δύο ακολουθίες κόμβων
 - αν ένας κόμβος εισαχθεί στη u_1, u_2, \dots, u_{m+k}
 - ◆ εφαρμογή του αλγορίθμου Boehm στις στήλες του πλέγματος ελέγχου
 - ◆ εισάγεται μια πλήρης γραμμή από σημεία ελέγχου στο πλέγμα ελέγχου
 - όμοια αν ένας κόμβος εισαχθεί στη v_1, v_2, \dots, v_{n+l}
 - ◆ εφαρμογή του αλγορίθμου Boehm στις γραμμές του πλέγματος ελέγχου
 - ◆ εισάγεται μια πλήρης στήλη από σημεία ελέγχου στο πλέγμα ελέγχου

Ιδιότητες

- Είναι γενικεύσεις των ιδιοτήτων των καμπυλών B-spline
- Οι επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο έχουν:
 - Τοπικό έλεγχο
 - Ισχυρή ιδιότητα κυρτού περιβλήματος
 - Είναι αναλλοίωτες σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς
 - Είναι αναλλοίωτες σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς των παραμέτρων
 - Γραμμική ακρίβεια
 - Παρεμβάλλουν τα ακραία σημεία ελέγχου αν οι ακραίοι κόμβοι έχουν κατάλληλη πολλαπλότητα
- Δεν έχουν την ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης

Παρεμβολή

- Δι-κυβικές επιφάνειες B-spline τανυστικό γινόμενο $Q(u, v)$: επιφάνειες βαθμού 3 ως προς u και v
- Αν δίνονται
 - $(m+1) \times (n+1)$ σημεία $\mathbf{p}_{i,j}$, $i=0,1,\dots,m$ και $j=0,1,\dots,n$
 - Δυο ακολουθίες κόμβων $u_i, i=0,1,\dots,m$ και $v_j, j=0,1,\dots,n$όρισε τα $(m+3) \times (n+3)$ σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_{i,j}$ της $Q(u, v)$ που ικανοποιούν:
$$Q(u_i, v_j) = \mathbf{p}_{i,j}, \quad i = 0,1,\dots,m \text{ και } j = 0,1,\dots,n$$
- Υπολογισμός :
 - Παρεμβολή κάθε στήλης του πίνακα των σημείων $\mathbf{p}_{i,j}$ ως προς u
 - ◆ Υπολογισμός των σημείων ελέγχου $\mathbf{s}_{i,j}$ των αντίστοιχων καμπυλών παρεμβολής
 - ◆ Καθεμία από τις καμπύλες έχει $(m+3)$ σημεία ελέγχου και απαιτεί $\mathbf{r}_{0,j}$ και $\mathbf{r}_{1,j}$, $j=0,1,\dots,n$
 - Παρεμβολή κάθε γραμμής των $\mathbf{s}_{i,j}$ ως προς v
 - ◆ Υπολογισμός των σημείων ελέγχου $\mathbf{q}_{i,j}$
 - ◆ Καθεμία από τις $(m+3)$ καμπύλες έχει $(n+3)$ σημεία ελέγχου και απαιτεί $c_{i,0}$ και $c_{i,1}$