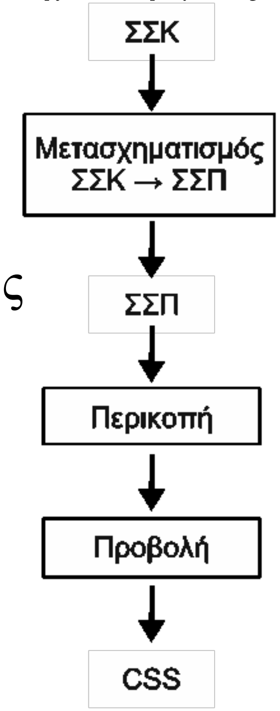
Γραφικά & Οπτικοποίηση

Κεφάλαιο 4

Προβολές και Μετασχηματισμοί Παρατήρησης

Εισαγωγή

- Στα γραφικά υπάρχουν:
  - 3Δ μοντέλα
  - 2Δ συσκευές επισκόπησης (οθόνες & εκτυπωτές)
- Προοπτική απεικόνιση (**προβολή**):
  - Λαμβάνει χώρα σε κάποιο σημείο της σωλήνωσης γραφικών
  - Συνήθως μετά το στάδιο περικοπής και πριν το στάδιο δημιουργίας εικόνας
- Μετασχηματισμός Παρατήρησης:
  - Ορίζει την μετάβαση από το Σύστημα Συντεταγμένων Κόσμου (**ΣΣΚ**) στον Κανονικοποιημένο Χώρο Οθόνης (**ΚΧΟ**) μέσω του Συστήματος Συντεταγμένων Παρατηρητή (**ΣΣΠ**)
  - Καθορίζει τα όρια αποκοπής (για περικοπή στο οπτικό πεδίο) στο ΣΣΠ



Συστήματα Συντεταγμένων

- Όλα τα αντικείμενα αρχικά ορίζονται στο τοπικό τους σύστημα συντεταγμένων
  - Τα αντικείμενα αυτά ενοποιούνται στο ΣΣΚ
- Το ΣΣΚ ορίζει το μοντέλο ενός 3Δ συνθετικού κόσμου
- Η μετάβαση από το ΣΣΚ στο ΣΣΠ:
  - Απλοποιεί κάποιες διαδικασίες όπως η περικοπή (πχ. καθορισμός των ορίων αποκοπής από τον χρήστη) και η προβολή
- Η μετάβαση από το ΣΣΠ στο ΚΧΟ:
  - Εξασφαλίζει ότι όλα τα αντικείμενα, που πέρασαν από την περικοπή, θα ορίζονται σε κανονικοποιημένο χώρο (συνήθως [-1,1])
- Τα αντικείμενα που ορίζονται σε κανονικοποιημένο χώρο:
  - Μπορούν εύκολα να κλιμακωθούν στις συντεταγμένες οποιασδήποτε οθόνης
  - Διατηρούν υψηλή αριθμητική ακρίβεια (floating point)

Προβολές

- Προβολή: δημιουργία της εικόνας ενός αντικειμένου πάνω σε ένα απλούστερο αντικείμενο (πχ. ευθεία, επίπεδο, επιφάνεια)
- Οι **ευθείες προβολής** (ή απλά **προβολείς**) ορίζονται από:
  - Το κέντρο προβολής
  - Τα προβαλλόμενα σημεία
- Η τομή ενός προβολέα με το απλό αντικείμενο (πχ. επίπεδο προβολής) σχηματίζει την εικόνα ενός σημείου του αρχικού αντικειμένου
- Οι προβολές ορίζονται και σε χώρους μεγάλων διαστάσεων
- Στα γραφικά με υπολογιστή & την οπτικοποίηση:
  - Οι προβολές είναι από τις 3Δ στις 2Δ
  - Ο 2Δ χώρος αναφέρεται σαν **επίπεδο προβολής** και παριστάνει την συσκευή απεικόνισης

Προβολές (2)

- Μας ενδιαφέρουν 2 ειδών προβολές:
  - **Προοπτική**: η απόσταση του κέντρου προβολής από το επίπεδο προβολής είναι **πεπερασμένη**
  - **Παράλληλη:** η απόσταση του κέντρου προβολής από το επίπεδο προβολής είναι **άπειρη**
- Οι προοπτικές απεικονίσεις **δεν** είναι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί → δεν μπορούν να περιγραφούν με πίνακες συσχετισμένων μετασχηματισμών

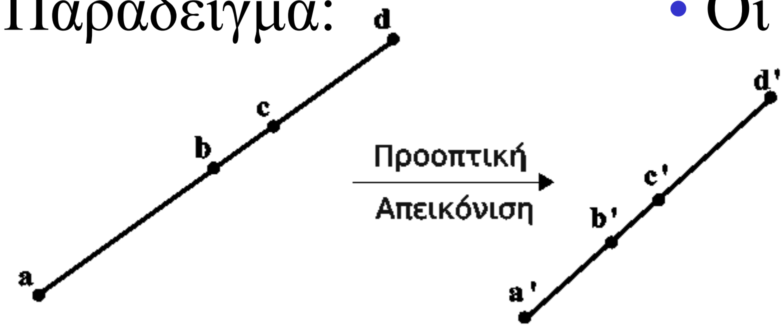
Διαφορές μεταξύ συσχετισμένων μετασχηματισμών & προοπτικών απεικονίσεων:

Διατηρούμενη Ιδιότητα	Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί	Προοπτική Απεικόνιση
Γωνίες	ΟΧΙ	ΟΧΙ
Αποστάσεις	ΟΧΙ	ΟΧΙ
Λόγοι αποστάσεων	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Παράλληλες γραμμές	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Συσχετισμένοι συνδυασμοί	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Ευθείες γραμμές	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Λόγοι αναλογιών	ΝΑΙ	ΝΑΙ

Προβολές (3)

- Παράλληλες ευθείες:
  - η προβολή τους *δεν* απεικονίζεται σε παράλληλες ευθείες → μοιάζουν να τέμνονται στο *σημείο φυγής*
  - η προβολή τους απεικονίζεται σε παράλληλες ευθείες μόνο όταν το επίπεδο τους είναι παράλληλο στο επίπεδο προβολής
- Μια ευθεία απεικονίζεται σε ευθεία

Παράδειγμα:



- Οι λόγοι αποστάσεων δεν διατηρούνται:

$$\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{bd}} \neq \frac{\mathbf{a'b'}}{\mathbf{b'd'}}$$

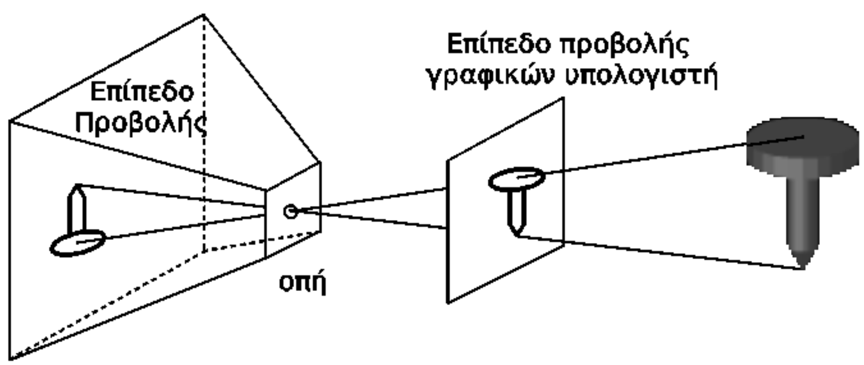
- Οι λόγοι αναλογιών διατηρούνται:

$$\frac{\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{cd}}}{\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{bd}}} = \frac{\frac{\mathbf{a'c'}}{\mathbf{c'd'}}}{\frac{\mathbf{a'b'}}{\mathbf{b'd'}}}$$

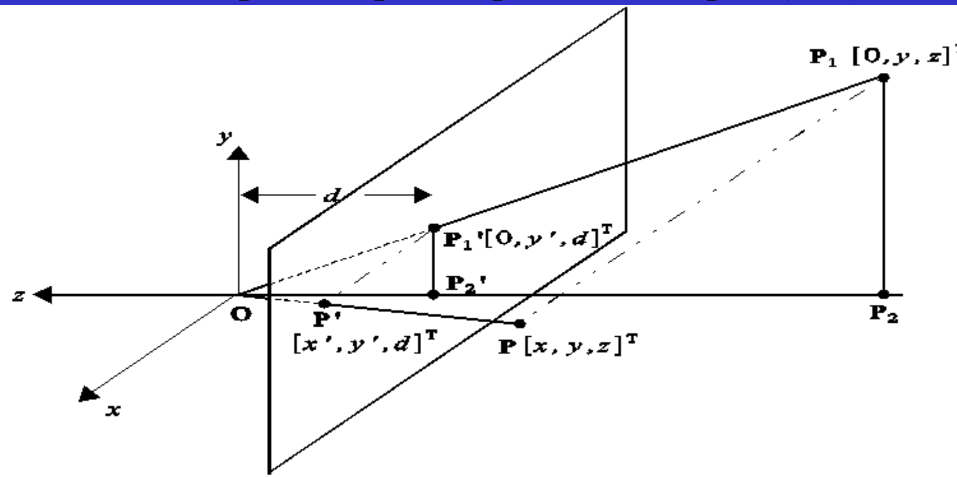
- Για την πλήρη περιγραφή της προβαλλόμενης εικόνας μιας ευθείας χρειαζόμαστε 3 σημεία πάνω στη ευθεία

Προοπτική Προβολή

- Μοντελοποιεί το σύστημα παρατήρησης των ματιών μας
- Μπορεί να περιγραφεί με βάση μια σημειακή κάμερα (οπή):
  - **Κέντρο προβολής:** οπή
  - **Επίπεδο προβολής:** το επίπεδο προβολής γραφικών (όπου δημιουργείται η εικόνα)
  - Δημιουργεί μια ανεστραμμένη εικόνα
  - Μπορεί να παράγει μια ‘όρθια’ εικόνα τοποθετώντας το επίπδο προβολής ‘μπροστά’ από την οπή



Προοπτική Προβολή (2)



- Υποθέσεις:
  - το κέντρο προβολής είναι η αρχή των αξόνων
  - το επίπεδο προβολής είναι κάθετο στο αρνητικό τμήμα του άξονα z σε απόσταση d από το κέντρο
- Ένα σημείο $\mathbf{P} = [x, y, z]^T$ προβάλλεται στο $\mathbf{P}' = [x', y', z']^T$
- Τα $\mathbf{P_1}$ & $\mathbf{P_1}'$ είναι οι προβολές των **P** & **P**΄ στο επίπεδο *yz*
- $\triangle\mathbf{OP_1P_2}$ και $\triangle\mathbf{OP_1'P_2'}$ είναι όμοια: $\dfrac{\mathbf{P_1'P_2'}}{\mathbf{OP_2'}} = \dfrac{\mathbf{P_1P_2}}{\mathbf{OP_2}} \Rightarrow \dfrac{y'}{d} = \dfrac{y}{z} \Rightarrow y' = \dfrac{d \cdot y}{z}$
- Περομοίως: $x' = \dfrac{d \cdot x}{z}$
- Οι παραπάνω είναι μη γραμμικές εξισώσεις (διαίρεση με *z*)

Προοπτική Προβολή (3)

- Τέχνασμα για έκφραση προοπτικής προβολής με μορφή πίνακα:

  Χρήση του πίνακα

$$\mathbf{P}_{\mathbf{PER}} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

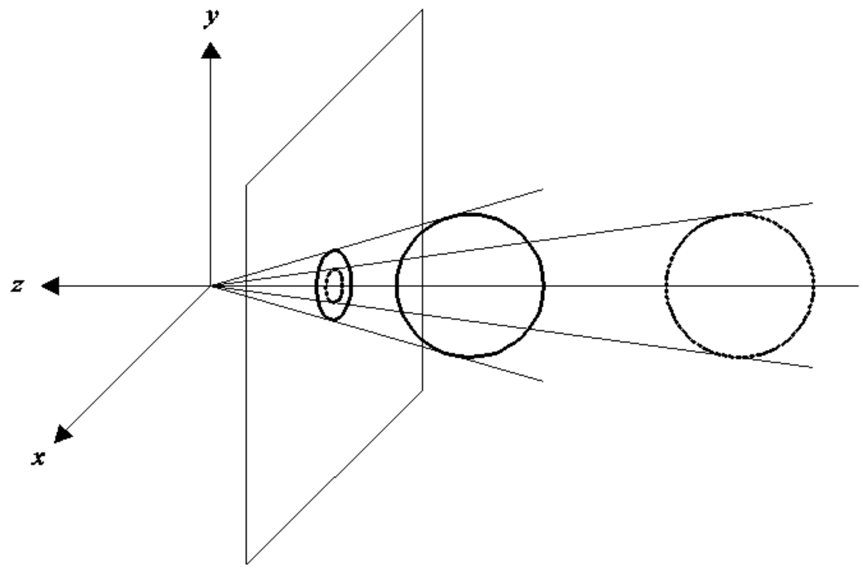
  που μεταβάλει την ομογενή συντεταγμένη και απεικονίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου $[x, y, z]^T$ ως εξής:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{PER}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ z \cdot d \\ z \end{bmatrix}$$

- Διαίρεση με την ομογενή συντεταγμένη: $\begin{bmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ z \cdot d \\ z \end{bmatrix} / z = \begin{bmatrix} \frac{x \cdot d}{z} \\ \frac{y \cdot d}{z} \\ d \\ 1 \end{bmatrix}$

Προοπτική Προβολή (4)

- Προοπτική σμίκρυνση:
  - Το μέγεθος της προβολής ενός αντικειμένου είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης του από το κέντρο προβολής



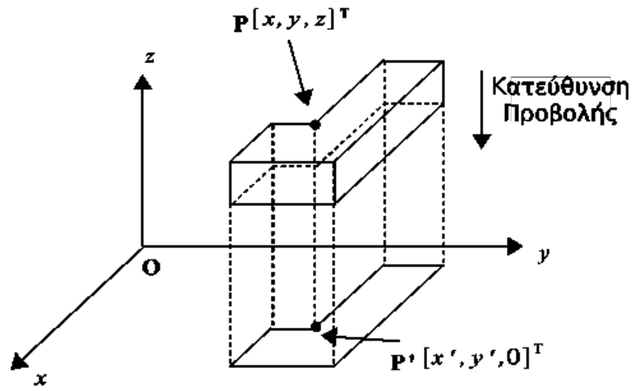
- Γνωστή στους αρχαίους Έλληνες
- O Leonardo da Vinci μελέτησε τους νόμους της προοπτικής
- Παλαιότερα δεν χρησιμοποιείτο η προοπτική στη ζωγραφική
  - Επικρατούσαν συμβολικά κριτήρια

Παράλληλη Προβολή

- Το κέντρο προβολής βρίσκεται σε **άπειρη** απόσταση από το επίπεδο προβολής
- Οι ευθείες προβολής είναι **παράλληλες** μεταξύ τους
- Για την περιγραφή της παράλληλης προβολής πρέπει να οριστούν:
  - Η κατεύθυνση προβολής (διάνυσμα)
  - Το επίπεδο προβολής
- Υπάρχουν 2 είδη παράλληλης προβολής:
  - **Ορθογραφική**: η κατεύθυνση προβολής είναι κάθετη στο επίπεδο προβολής
  - **Πλάγια**: η κατεύθυνση προβολής δεν είναι απαραίτητα είναι κάθετη στο επίπεδο προβολής

Ορθογραφική Προβολή

- Συνήθως χρησιμοποιείται κάποιο από το κύρια επίπεδα σαν επίπεδο προβολής

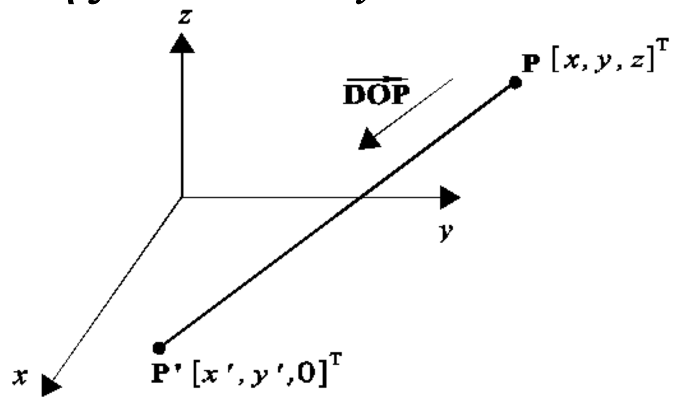


- Έστω ότι χρησιμοποιείται το επίπεδο *xy*
- Ένα σημείο $\mathbf{P} = [x, y, z]^T$ θα προβληθεί στο $\mathbf{P}' = [x', y', z']^T = [x, y, 0]^T$ ως εξής:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}_{\mathbf{ORTHO}} \cdot \mathbf{P} \qquad \text{όπου} \qquad \mathbf{P}_{\mathbf{ORTHO}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πλάγια Προβολή

- Έστω η κατεύθυνση προβολής: $\overrightarrow{\mathbf{DOP}} = [DOP_x, DOP_y, DOP_z]^T$ και το επίπεδο προβολής είναι το *xy*



- Η προβολή $\mathbf{P}' = [x', y', z']^T$ του σημείου $\mathbf{P} = [x, y, z]^T$ θα είναι

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{DOP}} \quad (1) \text{ για κάποιο } \lambda$$

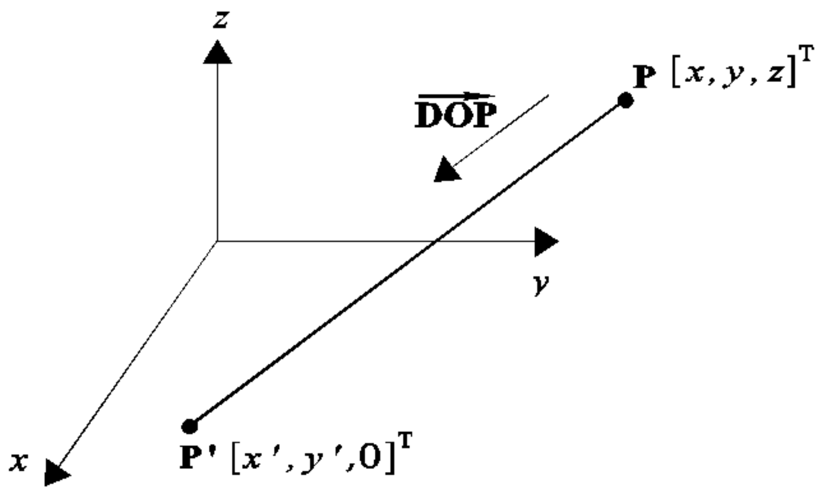
- Η *z* συντεταγμένη του **P΄** είναι 0, οπότε η (1) γίνεται:

$$0 = z + \lambda \cdot DOP_z \text{ or } \lambda = -\frac{z}{DOP_z}$$

- Οι άλλες 2 συντεταγμένες του **P΄** είναι:

$$x' = x + \lambda \cdot DOP_x = x - \frac{DOP_x}{DOP_z} \cdot z \text{ και } y' = y - \frac{DOP_y}{DOP_z} \cdot z$$

Πλάγια Προβολή (2)



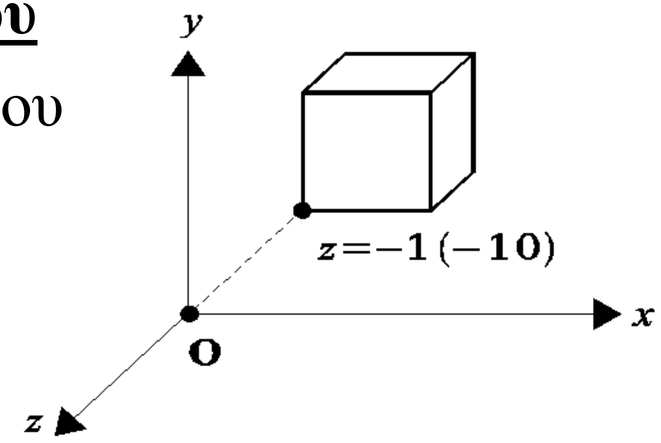
- Σε μορφή πίνακα:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{OBLIQUE}}(\overrightarrow{\mathbf{DOP}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{DOP_x}{DOP_z} & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{DOP_y}{DOP_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_{\mathbf{OBLIQUE}}(\overrightarrow{\mathbf{DOP}}) \cdot \mathbf{P}$

Παράδειγμα Προβολής 1

<u>Παράδειγμα 1: **Προοπτική Προβολή κύβου**</u>



Προσδιορισμός προοπτικών προβολών κύβου πλευράς 1

(a) το επίπεδο προβολής είναι το z=-1 και

(b) το επίπεδο προβολής είναι το z=-10.

Ο κύβος βρίσκεται στο επίπεδο προβολής.

<u>Λύση (a):</u>

- Αναπαράσταση κορυφών κύβου σε πίνακα 4×8:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

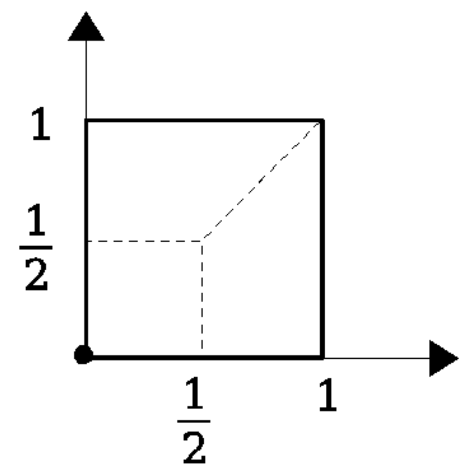
Παράδειγμα Προβολής 1 (2)

- Πολλαπλασιασμός του πίνακα προοπτικής προβολής (d=-1) με το $\boldsymbol{C}$:

$$\mathbf{P_{PER}}\cdot\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\cdot\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&-1&-1&0&0&-1&-1&0\\0&0&-1&-1&0&0&-1&-1\\1&1&1&1&2&2&2&2\\-1&-1&-1&-1&-2&-2&-2&-2\end{bmatrix}$$

- Κανονικοποίηση κατά την ομογενή συντεταγμένη:

$$\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$



Παράδειγμα Προβολής 1 (3)

(b) Ο αρχικός κύβος είναι:

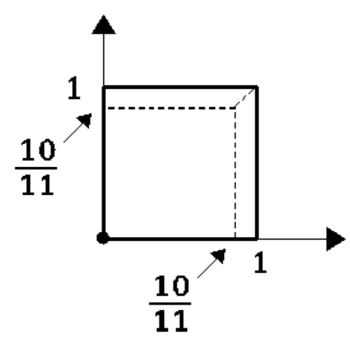
$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Πολλαπλασιασμός του πίνακα προοπτικής προβολής (d=-10) με το **C’**:

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -10 & 0 & 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 110 & 110 & 110 & 110 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -11 & -11 & -11 & -11 \end{bmatrix}$$

- Κανονικοποίηση κατά την ομογενή συντεταγμένη :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{10}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{10}{11} \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα Προβολής 2

Παράδειγμα 2: **Προοπτική προβολή σε τυχαίο επίπεδο**

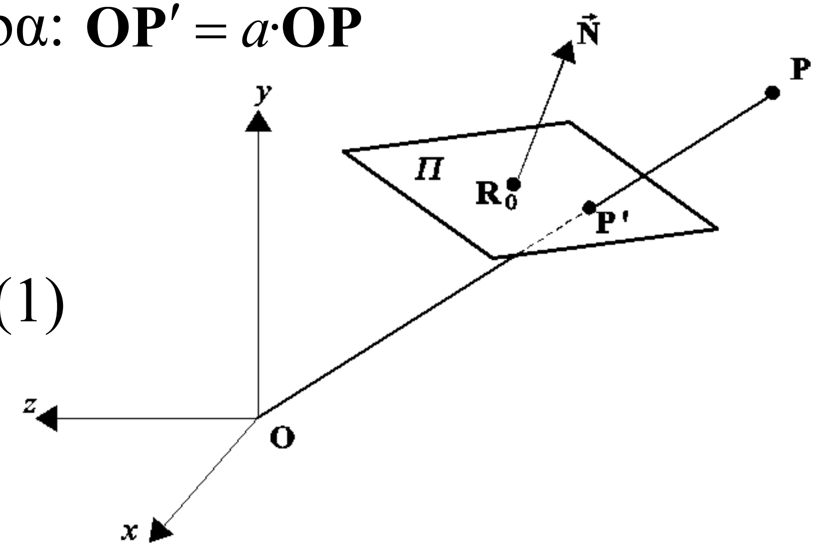
Υπολογισμός της προοπτικής προβολής ενός σημείου **P**=$[x, y, z]^T$ σε τυχαίο επίπεδο **Π** ορισμένο από κανονικό διάνυσμα $\vec{\mathbf{N}} = [n_x, n_y, n_z]^T$ και σημείο $\mathbf{R_0}=[x_0,y_0,z_0]^T$. Το κέντρο προβολής είναι το **O**.

Λύση:

- **P′**=$[x', y', z']^T$ είναι η προβολή του **P**=$[x, y, z]^T$
- Τα $\overrightarrow{\mathbf{OP}'}$ και $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ είναι συνευθειακά, άρα: $\overrightarrow{\mathbf{OP}'} = a\cdot\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ για κάποιο a
- Στις εξισώσεις προβολής:

$$x' = ax\ ,\ y' = ay\ ,\ z' = az \quad (1)$$

πρέπει να προσδιοριστεί το a.



Παράδειγμα Προβολής 2 (2)

- Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{R_0P'}}$ βρίσκεται στο επίπεδο προβολής, άρα:

$$\vec{N}\cdot\overrightarrow{\mathbf{R_0P'}} = 0$$

$$\text{ή } n_x(x'-x_0)+n_y(y'-y_0)+n_z(z'-z_0)=0$$

$$\text{ή } n_x x'+n_y y'+n_z z' = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0$$

- Αντικαθιστούμε τις τιμές των *x, y, z* από την (1), θέτουμε $c = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0$ και λύνουμε ως προς *a*:

$$a = \frac{c}{n_x x + n_y y + n_z z}$$

- Οι εξισώσεις προβολής περιλαμβάνουν διαίρεση με έναν συνδυασμό των *x,y,z*
- Δίνεται σε μορφή πίνακα τροποποιώντας τις ομογενείς συντεταγμένες:

$$\mathbf{P_{PER,\Pi}} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα Προβολής 3

Παράδειγμα 3: **Πλάγια προβολή με γωνίες Αζιμούθιου & Ύψους**

Μερικές φορές, η πλάγιες προβολές καθορίζονται με γωνίες αζιμούθιου & ύψους φ και θ, η οποίες ορίζουν τη σχέση της κατεύθυνσης προβολής και του επιπέδου προβολής. Προσδιορισμός του πίνακα προβολής για την περίπτωση αυτή.

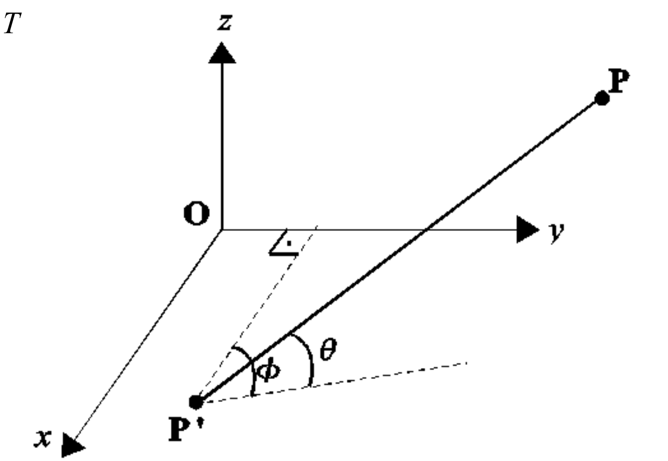
Λύση:

- Έστω *xy* το επίπεδο προβολής
- Το διάνυσμα της κατεύθυνσης προβολής είναι:

$$\overrightarrow{\mathbf{DOP}} = [\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta]^T$$

- Έτσι:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{OBLIQUE}}(\phi,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{\cos\phi}{\tan\theta} & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{\sin\phi}{\tan\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα Προβολής 4

Παράδειγμα 4: **Πλάγια προβολή σε τυχαίο επίπεδο**

Προσδιορισμός της πλάγιας προβολής σε τυχαίο επίπεδο **Π**, που ορίζεται από σημείο $\mathbf{R_0}=[x_0,y_0,z_0]^T$ και κανονικό διάνυσμα $\vec{\mathbf{N}}=[n_x,n_y,n_z]^T$. Η κατεύθυνση της προβολής δίδεται από το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{DOP}}=[DOP_x,DOP_y,DOP_z]^T$

Λύση:

Μετατροπή του επιπέδου **Π** ώστε να συμπέσει με το επίπεδο *xy*, χρήση του πίνακα πλάγιας προβολής, αναίρεση της πρώτης μετατροπής:

- Βήμα 1: Μεταφορά του $\mathbf{R_0}$ στην αρχή των αξόνων, $\mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{R_0}})$
- Βήμα 2: Ευθυγράμμιση του $\vec{\mathbf{N}}$ με τον θετικό άξονα z (με χρήση του $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{N}})$ από [Πχ. 3.12])
- Βήμα 3: Χρήση του πίνακα πλάγιας προβολής με την τροποποιημένη κατεύθυνση προβολής σύμφωνα με τα προηγούμενα βήματα:

Παράδειγμα Προβολής 4 (2)

$$\overrightarrow{\mathbf{DOP}}' = \mathbf{A}(\vec{\mathbf{N}}) \cdot \mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{R_0}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{DOP}}$$

- Βήμα 4: Αναίρεση της ευθυγράμμισης $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{N}})^{-1}$
- Βήμα 5: Αναίρεση της μεταφοράς $\mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{R_0}})$
- Τελικά:

$$\mathbf{P_{OBLIQUE,\Pi}}(\overrightarrow{\mathbf{DOP}}) = \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{R_0}}) \cdot \mathbf{A}(\vec{\mathbf{N}})^{-1} \cdot \mathbf{P_{OBLIQUE}}(\overrightarrow{\mathbf{DOP}}') \cdot \mathbf{A}(\vec{\mathbf{N}}) \cdot \mathbf{T}(-\overrightarrow{\mathbf{R_0}})$$

Μετασχηματισμός Παρατήρησης (ΜΠ)

- Ορίζει:
  - Τη διαδικασία της μετατροπής των συντεταγμένων:

    ΣΣΚ ⟶ ΣΣΠ ⟶ ΚΧΟ

  - Τα όρια αποκοπής (για περικοπή στο οπτικό πεδίο) στο ΣΣΠ

    (Δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων)

- **Μετασχηματισμός Παρατήρησης**: **α.** Μετατροπή ΣΣΚ-σε-ΣΣΠ

  β. Μετατροπή ΣΣΠ-σε-ΚΧΟ

  - Ορθογραφική προβολή
  - Προοπτική προβολή

- Η συντεταγμένη *z* διατηρείται κατά τη μετατροπή ΣΣΠ-σε-ΚΧΟ
  - Τα στάδια που έπονται του ΜΠ (πχ. απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών) απαιτούν 3Δ πληροφορία

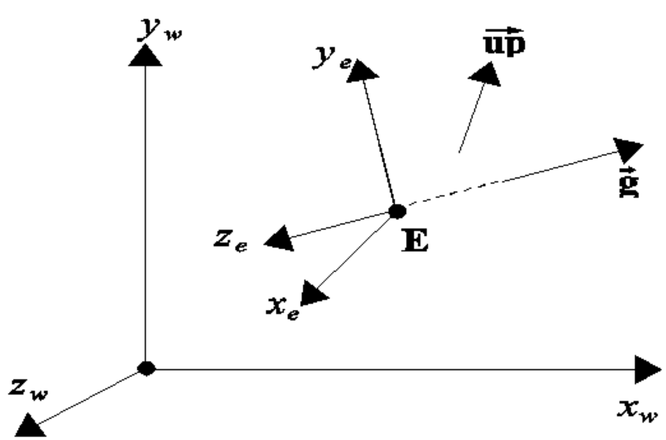
ΣΣΚ σε ΣΣΠ

- Το ΣΣΠ μπορεί να ορισθεί εντός του ΣΣΚ δίνοντας:
  - Το κέντρο του ΣΣΠ **E**
  - Την κατεύθυνση παρατήρησης $\vec{\mathbf{g}}$
  - Την άνω κατεύθυνση $\overrightarrow{\mathbf{up}}$
- Το **E** είναι το σημείο παρατήρησης
- Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{up}}$
  - ορίζει την άνω κατεύθυνση
  - όχι αναγκαστικά κάθετο στο $\vec{\mathbf{g}}$
- Βήματα μετατροπής από ΣΣΚ σε ΣΣΠ :
  1. Ορισμός των αξόνων x_e, y_e και z_e του ΣΣΠ
  2. Μετατροπή ΣΣΚ-σε-ΣΣΠ για όλα τα αντικείμενα

ΣΣΚ σε ΣΣΠ (2)

1. <u>Ορισμός των αξόνων του ΣΣΠ</u>

- Επαρκής πληροφορία ($\mathbf{E}, \overrightarrow{\mathbf{up}}, \vec{\mathbf{g}}$) αφού το σύστημα είναι δεξιόστροφο
- Ευθυγράμμιση των x_e- και y_e-αξόνων με τους άξονες του ΣΣΚ με την αποδοχή ότι:
  - x_e είναι ο οριζόντιος άξονας & αυξάνει προς τα δεξιά
  - y_e είναι ο κατακόρυφος άξονας & αυξάνει προς τα πάνω
  - ο z_e-άξονας δείχνει προς τον παρατηρητή (δεξιόστροφο ΣΣΠ) $\overrightarrow{\mathbf{z}_\mathbf{e}} = -\vec{\mathbf{g}}$
  - Υπολογισμός των x_e- και y_e-αξόνων με εξωτερικά γινόμενα:



$$\overrightarrow{\mathbf{x}_\mathbf{e}} = \overrightarrow{\mathbf{up}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}_\mathbf{e}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{y}_\mathbf{e}} = \overrightarrow{\mathbf{z}_\mathbf{e}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}_\mathbf{e}}$$

ΣΣΚ σε ΣΣΠ (3)

2. Μετατροπή από ΣΣΚ-σε-ΣΣΠ
   i. Εύρεση του πίνακα $\mathbf{M}_{\Sigma\Sigma K \to \Sigma\Sigma\Pi}$
   ii. Πολλαπλασιασμός όλων των κορυφών των αντικειμένων με αυτόν

- Από [Πχ. 3.16] η μετατροπή χρειάζεται 2 μετασχηματισμούς:
  - Μεταφορά κατά $-\vec{\mathbf{E}} = [E_x, E_y, E_z]^T$
  - Αλλαγή βάσης (μετασχηματισμός περιστροφής)
- Έστω ότι οι ΣΣΚ συντεταγμένες των μοναδιαίων διανυσμάτων βάσης του ΣΣΠ είναι:

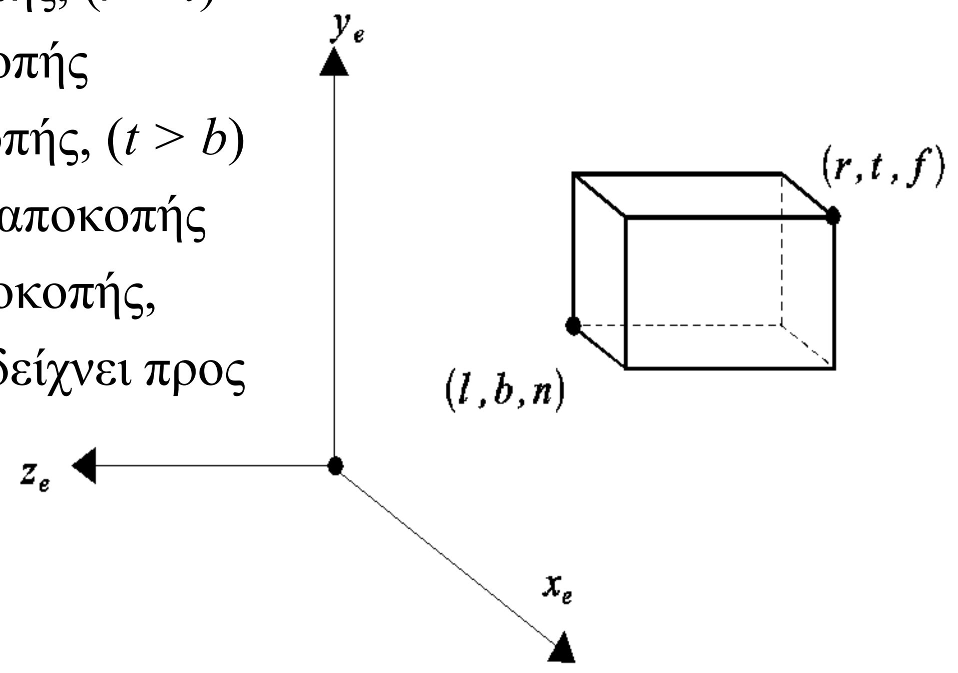
$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{e}} = [a_x, a_y, a_z]^T \;,\; \hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{e}} = [b_x, b_y, b_z]^T \text{ and } \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{e}} = [c_x, c_y, c_z]^T$$

- Έτσι:

$$\mathbf{M}_{\Sigma\Sigma K \to \Sigma\Sigma\Pi} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 0 \\ c_x & c_y & c_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -E_x \\ 0 & 1 & 0 & -E_y \\ 0 & 0 & 1 & -E_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΣΣΠ σε ΚΧΟ: Ορθογραφική προβολή

- Ορθογραφική προβολή πάνω στο *xy*-επίπεδο:
  - Επιλογή μιας περιοχής του χώρου (**στερεό παρατήρησης**) που θα απεικονιστεί στο ΚΧΟ
    - Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο
    - Ορίζεται με 2 αντίθετες κορυφές
  - $x_e = l$, το αριστερό επίπεδο αποκοπής
  - $x_e = r$, το δεξί επίπεδο αποκοπής, ($r > l$)
  - $y_e = b$, το κάτω επίπεδο αποκοπής
  - $y_e = t$, το πάνω επίπεδο αποκοπής, ($t > b$)
  - $z_e = n$, το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής
  - $z_e = f$, το όπισθεν επίπεδο αποκοπής, ($f < n$, αφού ο άξονας z_e axis δείχνει προς τον παρατηρητή)



ΣΣΠ σε ΚΧΟ: Ορθογραφική προβολή(2)

- Για διατήρηση της *z*-συντεταγμένης χρήση: $\mathbf{M}_{\mathbf{OP\Theta O}} = \mathbf{ID}$
- Μετατροπή του στερεού παρατήρησης στο ΚΧΟ:
  - Μεταφορά & Αλλαγή Κλίμακας
  - Απεικόνιση των (*l, b, n*) στο -1 και των (*r, t, f*) στο 1

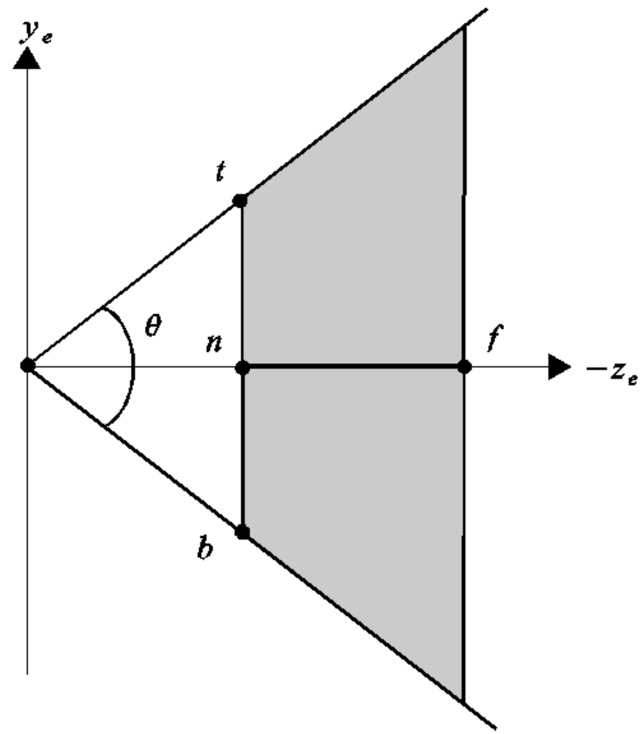
$$\mathbf{M}^{\mathbf{OP\Theta O}}_{\mathbf{\Sigma\Sigma\Pi\to KXO}} = \mathbf{S}\left(\frac{2}{r-l},\frac{2}{t-b},\frac{2}{f-n}\right)\cdot\mathbf{T}\left(-\frac{r+l}{2},-\frac{t+b}{2},-\frac{n+f}{2}\right)\cdot\mathbf{ID} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{r+l}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{t+b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{n+f}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Άρα ένα σημείο του ΣΣΚ, $\mathbf{X_w} = [\mathrm{x_w}, \mathrm{y_w}, \mathrm{z_w}]^{\mathrm{T}}$ απεικονίζεται στο ΚΧΟ μέσω: $\mathbf{X_s} = \mathbf{M}^{\mathbf{OP\Theta O}}_{\mathbf{\Sigma\Sigma\Pi\to KXO}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{\Sigma\Sigma K\to\Sigma\Sigma\Pi}} \cdot \mathbf{X_w}$

ΣΣΠ σε ΚΧΟ: Προοπτική προβολή

- Το στερεό παρατήρησης είναι μια κόλουρη πυραμίδα, συμμετρική ως προς τον $-z_e$ άξονα
- Το στερεό παρατήρησης ορίζεται από:
  - θ , γωνία του οπτικού πεδίου στην κατεύθυνση y
  - *aspect,* ο λόγος πλάτους προς ύψος μιας τομής της πυραμίδας
  - $z_e = n$, το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής
  - $z_e = f$, το όπισθεν επίπεδο αποκοπής ($f < n$)



ΣΣΠ σε ΚΧΟ: Προοπτική προβολή (2)

- Η προβολή γίνεται στο έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής $z_e = n$
- Υπολογισμός των υπολοίπων ορίων αποκοπής:
  - → πάνω: $t = |n| \cdot \tan(\frac{\theta}{2})$
  - → κάτω: $b = -t$
  - → δεξί: $r = t \cdot aspect$
  - → αριστερό: $l = -r$
- Χρήση τροποποιημένου πίνακα προοπτικής προβολής:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{PER}} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *z*-συντεταγμένη :
  - Διατήρησή της για ΑΚΕ & άλλους υπολογισμούς στο χώρο οθόνης
  - Φυλάσσοντας απλά την z_e παραμορφώνει τα αντικείμενα
  - Χρήση απεικόνισης που διατηρεί ευθείες & επίπεδα

    $z_s = A + B / z_e$, όπου *A*,*B* σταθερές

ΣΣΠ σε ΚΧΟ: Προοπτική προβολή (3)

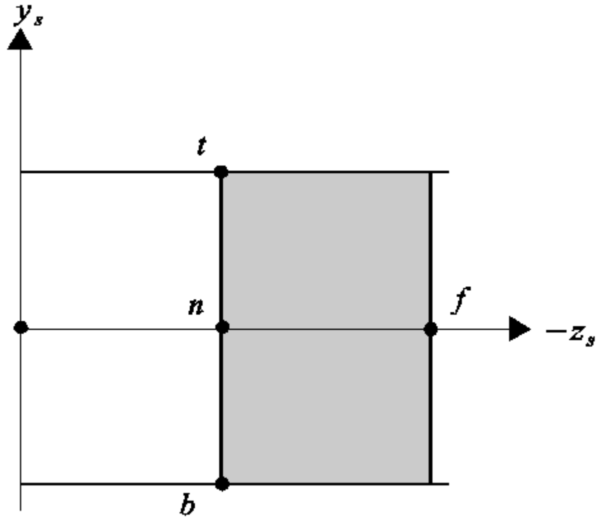
- Πρέπει $(z_e = n) \rightarrow (z_s = n)$ και $(z_e = f) \rightarrow (z_s = f)$ άρα:

  $A = (n + f)$ and $B = -nf$

- Η απεικόνιση δεν αλλάζει τα όρια $z_e = n$, $z_e = f$ αλλά αλλάζει τιμές z_e ανάμεσα στα όρια
- Οπότε ο πίνακας προοπτικής προβολής είναι:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{VT}} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Καθιστά την w-συντεταγμένη ίση με z_e
  - Πρέπει να ακολουθείται από διαίρεση με z_e (**προοπτική διαίρεση**)
  - Τα όρια αποκοπής δεν επηρεάζονται
  - Μετασχηματίζει την κόλουρη πυραμίδα σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο :



ΣΣΠ σε ΚΧΟ: Προοπτική προβολή (4)

- Η κατάσταση είναι παρόμοια με αυτήν πριν την ορθογραφική προβολή
- Το στερεό παρατήρησης είναι ήδη συμμετρικό προς τον $-z_e$ άξονα
- Βήματα μετατροπής από ΣΣΠ-σε-ΚΧΟ :
  1. $\mathbf{P_{VT}}$
  2. μεταφορά κατά z_e
  3. αλλαγή κλίμακας

$$\mathbf{M}_{\Sigma\Sigma\Pi \rightarrow \mathrm{KXO}}^{\Pi\mathrm{PO}\mathrm{O}\Pi} = \mathbf{S}\left(\frac{2}{r-l}, \frac{2}{t-b}, \frac{2}{f-n}\right) \cdot \mathbf{T}\left(0, 0, -\frac{n+f}{2}\right) \cdot \mathbf{P}_{\mathrm{VT}} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΣΣΠ σε ΚΧΟ: Προοπτική προβολή (5)

- Ένα σημείο του ΣΣΚ, $\mathbf{X_w} = [x_w, y_w, z_w]^T$ μετασχηματίζεται στο ΚΧΟ μέσω:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{\text{ΠΡΟΟΠ}}_{\text{ΣΣΠ}\rightarrow\text{ΚΧΟ}} \cdot \mathbf{M}_{\text{ΣΣΚ}\rightarrow\text{ΣΣΠ}} \cdot \mathbf{X_w}$$

  ακολουθούμενου από προοπτική διαίρεση με w $(= z_e)$ $\quad \mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} / w$

- Περικοπή στο οπτικό πεδίο εκτελείται πριν την προοπτική διαίρεση εξασφαλίζοντας ότι οι συντεταγμένες κάθε κορυφής κάθε αντικειμένου είναι εντός των ορίων αποκοπής:

$$-w \le x, y, z \le w$$

- Οι συντεταγμένες κάθε σημείου βρίσκονται τώρα στο διάστημα [-1,1]

ΣΣΠ σε ΚΧΟ: Προοπτική προβολή (6)

Παράδειγμα:

- Παίρνουμε τα συνοριακά σημεία σε συντεταγμένες ΣΣΠ $[l, b, n, 1]^T$ και $[0, 0, f, 1]^T$
- Εφαρμόζουμε τον πίνακα $\mathbf{P_{VT}}$:

$$\mathbf{P_{VT}} \cdot \begin{bmatrix} l \\ b \\ n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ln \\ bn \\ n^2 \\ n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P_{VT}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f^2 \\ f \end{bmatrix}$$

- Η ομογενής συντεταγμένη δεν είναι πια 1
- Εφαρμόζουμε τους πίνακες αλλαγής κλίμακας & μεταφοράς:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} ln \\ bn \\ n^2 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n \\ -n \\ -n \\ n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f^2 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ f \end{bmatrix}$$

ΣΣΠ σε ΚΧΟ: Προοπτική προβολή (7)

Παράδειγμα(συνέχεια):

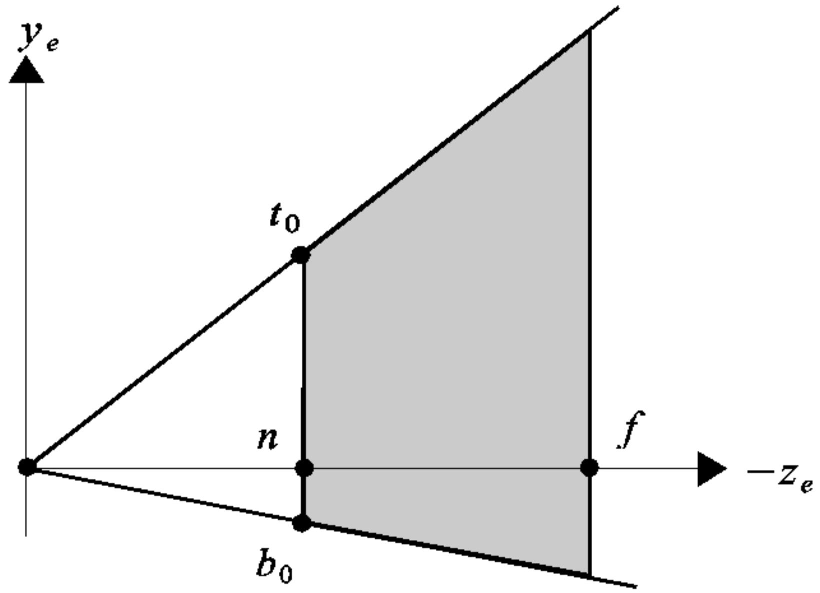
- Λόγω της συμμετρίας της κόλουρης πυραμίδας ως προς τον $-z_e$:
  $r = -l,\ t = -b$ οπότε $r - l = -2l,\ t - b = -2b$
- Προοπτική διαίρεση:

$$\begin{bmatrix} -n \\ -n \\ -n \\ n \end{bmatrix} / n = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ f \end{bmatrix} / f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

που είναι οι τιμές των σημείων στο ΚΧΟ

Προεκτάσεις Μετασχηματισμών Παρατήρησης

A. **Κόλουρη Πυραμίδα Μη Συμμετρική ως προς z_e άξονα**



π.χ. στερεοσκοπική παρατήρηση όπου 2 σημεία παρατήρησης είναι ελαφρώς μετατοπισμένα πάνω στον x_e–άξονα

Προεκτάσεις Μετασχηματισμών Παρατήρησης(2)

A. <u>Κόλουρη Πυραμίδα Μη Συμμετρική ως προς z_e άξονα</u>

- Παράμετροι των επιπέδων αποκοπής:
  - $z_e = n_0$, το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής (όπως πριν)
  - $z_e = f_0$, το όπισθεν επίπεδο αποκοπής, $f_0 < n_0$ (όπως πριν)
  - $y_e = b_0$, η y_e-συντεταγμένη του κάτω επιπέδου αποκοπής στην τομή με το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής
  - $y_e = t_0$, η y_e-συντεταγμένη του πάνω επιπέδου αποκοπής στην τομή με το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής
  - $x_e = l_0$, η x_e-συντεταγμένη του αριστερού επιπέδου αποκοπής στην τομή με το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής
  - $x_e = r_0$, η x_e-συντεταγμένη του δεξιού επιπέδου αποκοπής στην τομή με το έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής

Προεκτάσεις Μετασχηματισμών Παρατήρησης(3)

A. Κόλουρη Πυραμίδα Μη Συμμετρική ως προς z_e άξονα (βήματα)

- Μετασχηματίζουμε τη μη συμμετρική πυραμίδα σε συμμετρική ως προς το z_e με μια στρέβλωση πάνω στο *xy*-επίπεδο

$$\mathbf{SH_{xy}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & A & 0 \\ 0 & 1 & B & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- Υπολογισμός των παραμέτρων *A, B*
  - Στρέβλωση στη *y*-συντεταγμένη: απεικόνιση του μέσου του $t_0 b_0$ στο 0

$$\frac{b_0 + t_0}{2} + B \cdot n_0 = 0 \Rightarrow B = -\frac{b_0 + t_0}{2n_0}$$

  - Όμοια για τον παράγοντα στρέβλωσης του x_e : $A = -\dfrac{l_0 + r_0}{2n_0}$
- Άρα η (1) γίνεται:

$$\mathbf{SH_{MH-\Sigma YM}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{l_0 + r_0}{2n_0} & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{b_0 + t_0}{2n_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Προεκτάσεις Μετασχηματισμών Παρατήρησης(4)

A. <u>Κόλουρη Πυραμίδα Μη Συμμετρική ως προς z_e άξονα (βήματα)</u>

- Αλλαγή των ορίων αποκοπής, για να αντανακλούν το συμμετρικό σχήμα της νέας πυραμίδας:

$$n = n_0 \qquad f = f_0$$

$$l = l_0 - \frac{l_0 + r_0}{2} \qquad r = r_0 - \frac{l_0 + r_0}{2}$$

$$b = b_0 - \frac{b_0 + t_0}{2} \qquad t = t_0 - \frac{b_0 + t_0}{2}$$

- Αντικατάσταση των παραπάνω στο $\mathbf{M}_{\Sigma\Sigma\Pi \to \mathrm{KXO}}^{\Pi\mathrm{POO}\Pi}$

$$\mathbf{M}_{\Sigma\Sigma\Pi \to \mathrm{KXO}}^{\Pi\mathrm{POO}\Pi} = \begin{bmatrix} \frac{2n_0}{r_0 - l_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n_0}{t_0 - b_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_0 + f_0}{f_0 - n_0} & -\frac{2n_0 f_0}{f_0 - n_0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

που είναι ισοδύναμο με το αρχικό $\mathbf{M}_{\Sigma\Sigma\Pi \to \mathrm{KXO}}^{\Pi\mathrm{POO}\Pi}$ με τα όρια αποκοπής να έχουν αντικατασταθεί από τα αρχικά όρια αποκοπής.

Προεκτάσεις Μετασχηματισμών Παρατήρησης(5)

Α. **Κόλουρη Πυραμίδα Μη Συμμετρική ως προς z_e άξονα**

- Άρα δεν είναι απαραίτητο να υπάρχουν αρχικά όρια αποκοπής, μπορούν να ονομαστούν *n, f, l, r, b, t* από την αρχή.
- Η απεικόνιση ΣΣΠ→ΚΧΟ στη περίπτωση της μη-συμμετρικής προοπτικής προβολής συνεπώς είναι :

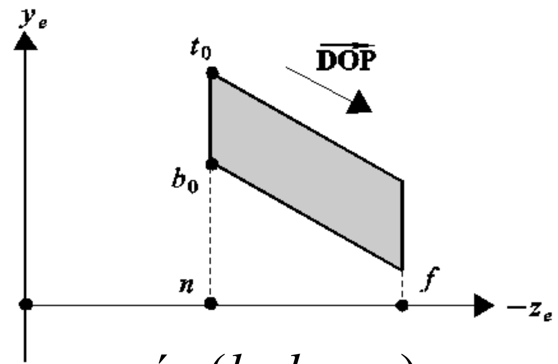
$$\mathbf{M}_{\Sigma\Sigma\Pi\to \mathrm{KXO}}^{\Pi\mathrm{POO}\Pi\text{-}\mathrm{MH}\text{-}\Sigma\mathrm{YM}} = \mathbf{M}_{\Sigma\Sigma\Pi\to \mathrm{KXO}}^{\Pi\mathrm{POO}\Pi} \cdot \mathbf{SH}_{\mathrm{MH}\text{-}\Sigma\mathrm{YM}} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{l+r}{2n} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{b+t}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{l+r}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{b+t}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Προεκτάσεις Μετασχηματισμών Παρατήρησης(6)

B. Πλάγια Προβολή

- Χρήσιμη π.χ. στον υπολογισμό πλάγιων προβολών σε 3Δ οθόνες:
  - $\mathbf{M}^{\mathbf{ΟΡΘΟ}}_{\mathbf{ΣΣΠ \to ΚΧΟ}}$ όχι επαρκής
  - Πρέπει να ληφθεί υπόψη η κατεύθυνση προβολής
- Στερεό Παρατήρησης: ένα παραλληλεπίπεδο 6 εδρών ορισμένο από:
  - 6 παραμέτρους για την μη-συμμετρική πυραμίδα (n_0, f_0, l_0, r_0, b_0, t_0)
  - Το διάνυσμα κατεύθυνσης προβολής $\overrightarrow{\mathbf{DOP}}$



- <u>Βήματα:</u>
  1. Μεταφορά του στερεού παρατήρησης ώστε το σημείο (l_0, b_0, n_0) να ταυτισθεί με το κέντρο του ΣΣΠ
  2. Στρέβλωση το επίπεδο *xy*

Προεκτάσεις Μετασχηματισμών Παρατήρησης(7)

Β. Πλάγια Προβολή (βήματα)

- Για το σημείο που ορίζεται από το κέντρο και $\overrightarrow{\mathbf{DOP}} = [DOP_x, DOP_y, DOP_z]^T$
  - Στρέβλωση της (DOP_y) συντεταγμένης: $DOP_y + B \cdot DOP_z = 0 \Rightarrow B = -\dfrac{DOP_y}{DOP_z}$
  - Όμοια, για τον παράγοντα στρέβλωσης x: $A = -\dfrac{DOP_x}{DOP_z}$
- Ο απαιτούμενος μετασχηματισμός είναι:

$$\mathbf{SH}_{\text{ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ}} \cdot \mathbf{T}_{\text{ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{DOP_x}{DOP_z} & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{DOP_y}{DOP_z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_0 \\ 0 & 1 & 0 & -b_0 \\ 0 & 0 & 1 & -n_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αλλαγή των ορίων αποκοπής για το νέο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο
  $n = 0, f = f_0 - n_0, l = 0, r = r_0 - l_0, \ b = 0, t = t_0 - b_0$
- Η απεικόνιση ΣΣΠ→ΚΧΟ για γενική παράλληλη προβολή είναι:

$$\mathbf{M}^{\text{ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ}}_{\text{ΣΣΠ}\to\text{ΚΧΟ}} = \mathbf{M}^{\mathbf{ΟΡΘΟ}}_{\mathbf{ΣΣΠ}\to\mathbf{ΚΧΟ}} \cdot \mathbf{SH}_{\mathbf{ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ}}$$

Περικοπή στο οπτικό πεδίο & Μετασχηματισμός παρατήρησης

- **Περικοπή στο οπτικό πεδίο**:
  - Αφαιρεί τα στοιχειώδη αντικείμενα (τμήματα ή ολόκληρα) που βρίσκονται εκτός του στερεού παρατήρησης (κόλουρη γενικευμένη πυραμίδα)
  - Υλοποιείται με 3Δ αλγορίθμους αποκοπής
- Ο μετασχηματισμός παρατήρησης ορίζει τα 3Δ όρια αποκοπής.
- Η αποκοπή γίνεται στο ΚΧΟ, μετά από εφαρμογή του $\mathbf{M}_{\mathbf{\Sigma\Sigma\Pi\rightarrow KXO}}^{\mathbf{\Pi POO\Pi}}$ ή $\mathbf{M}_{\mathbf{\Sigma\Sigma\Pi\rightarrow KXO}}^{\mathbf{OP\Theta O}}$ αλλά πριν της διαίρεση με το w.
- Όρια αποκοπής για: <u>προοπτική προβολή</u>: $-w \leq x, y, z \leq w$
  <u>ορθογραφική ή παράλληλη προβολή</u>: $-1 \leq x, y, z \leq 1$
- Γιατί αποκοπή στις 3Δ και όχι στις 2Δ, μετά την απόρριψη του z?
  - Στην προοπτική προβολή, αντικείμενα πίσω από το κέντρο προβολής $\boldsymbol{E}$ θα εμφανίζονταν ανάποδα
  - Αποφυγή πιθανής προοπτικής διαίρεσης με το 0
  - Το όπισθεν και έμπροσθεν επίπεδο αποκοπής περιορίζουν το βάθος & επιτρέπουν την βέλτιστη ανάθεση της ακρίβειας του καταχωρητή βάθους

Μετασχηματισμός Πεδίου Παράστασης

- **Πεδίο παράστασης**: ορθογώνιο τμήμα της οθόνης όπου απεικονίζονται τα περιεχόμενα του στερεού παρατήρησης.
- Ορίζεται από την κάτω-αριστερή και πάνω-δεξιά κορυφές του
  - $[x_{min}, y_{min}]^T$ και $[x_{max}, y_{max}]^T$ σε συντεταγμένες εικονοστοιχείων
  - $[x_{min}, y_{min}, z_{min}]^T$ και $[x_{max}, y_{max}, z_{max}]^T$ για διατήρηση της z-συντεταγμένης
- **Ο μετασχηματισμός πεδίου παράστασης** μετατρέπει τα αντικείμενα από ΚΧΟ σε Σύστημα Συντεταγμένων Παραθύρου (ΣΣΘ) με μια αλλαγή κλίμακας & μια μεταφορά:

$$\mathbf{M}_{\text{ΚΧΟ}\to\text{ΣΣΘ}}^{\text{ΠΕΔ.ΠΑΡΑΣ}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x_{min}+x_{max}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y_{min}+y_{max}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z_{min}+z_{max}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_{max}-x_{min}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_{max}-y_{min}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_{max}-z_{min}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{max}-x_{min}}{2} & 0 & 0 & \frac{x_{min}+x_{max}}{2} \\ 0 & \frac{y_{max}-y_{min}}{2} & 0 & \frac{y_{min}+y_{max}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{z_{max}-z_{min}}{2} & \frac{z_{min}+z_{max}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Γενίκευση του 2Δ μετασχηματισμού παράστασης [παράδειγμα 3.8].
- Το μέγεθος πεδίου παράστασης ορίζει το τελικό μέγεθος αντικειμένων στην οθόνη